अंकगणितनी रीतो ने तेनां कारण.

છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થિઓ અને
ટ્રેનિંગ કાલેજના સ્કાલરોના
ઉપયોગ સારૂ.

રચનાર
વિઠ્ઠલદાસ ધનજીભાઈ,
હેડ માસ્તર, ફીમેલ ટ્રેનિંગ કાલેજ.

અમદાવાદ
આર્યોદય પ્રેસ.

સંવત ૧૯૪૧—સન ૧૮૮૫.

કીમત ૬ આના.

अंकगणितनी रीतो ने तेनां कारण.

છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓ અને
ટ્રેનિંગ કાલેજના સ્કાલરોના
ઉપયોગ સારૂ.

રચનાર

વિઠ્ઠલદાસ ધનજીભાઈ.

હેડ માસ્તર, ફીમેલ ટ્રેનિગ કાલેજ.

અમદાવાદ

આર્યોદય પ્રેસ.

સવત ૧૯૪૧—સન ૧૮૮૫.

કીમત ૬ આના.

અર્પણ પત્રિકા.



રા. બા. ગોપાળજી સુરભાઇ દેશાઇ
ફેલો ઓફ ધી યુનિવર્સિટી.

આસીસ્ટંટ એજ્યુકેશનલ ઇન્સ્પેક્ટર
કાઠીઆવાડ

ગુજરાતના ઘણા ભાગમાં કેળવણીનો શરૂઆતથી
પ્રચાર કરવામાં આપનો એક સરખો ઉત્સાહ
અને આગ્રહ તથા મારી સાથેના લાંબી મુ-
દતના પ્રેમની યાદગીરી રાખવાના પવિત્ર
હેતુથી આ શાળોપયોગી પુસ્તક હું
આપને પ્રેમ પૂર્વક અર્પણ કરૂં છું
તે સ્વિકારશો.

સેવક
વિઠ્ઠલદાસ ધનજીભાઇ.







પ્રસ્તાવના.

અંકગણિતની રીતોનાં કારણ સમજ્યા વગર માત્ર રીતો જાણી દાખલા ગણી જવાથી એ વિષયનાં મૂળતત્વનું ખરૂં જ્ઞાન થતું નથી અને તેથી તે વિષય પરિપક્વ આ-વડ્યો ગણાય નહિ. તેમજ કારણ જાણ્યા વગર વિદ્યાર્થીનું મન પ્રફુલ્લિત થતું નથી. કારણ એ, તે વિષયનો પાયો છે. જેમ પાકા પાયા વગર ઇમારત ટકતી નથી તેમ કારણ સમજ્યા વગર અંકગણિતનું જ્ઞાન નિષ્ફળ જાય છે. માટે હરેક વિદ્યાર્થીને એની અગત્ય છે.

સરકારી અંકગણિતમાં અને બીજાં અંકગણિતોમાં અંકગણિતની રીતોનાં કારણો આપેલાં છે પણ તે છોકરાંના મન ઉપર ઠસાવવામાં આવતાં હોય એમ જણાતું નથી. વળી તે લંબાણમાં ને છૂટક છૂટક હોવાથી છોકરાંને સમજવાને ગુંચવણ પડે છે. તેથી એ કારણો વિષયવાર સામટાં સહેલી ભાષામાં લખેલાં હોય તો તે છોકરાંને વધારે ઉપયોગી થઈ પડે. આવું એકે પુસ્તક ગુજરાતીમાં આજ સુધી બહાર પ-ડ્યું નથી. તેવા પુસ્તકની હું જ્યારે રાજકોટ ટ્રેનિંગ કા-લેજમાં હતો ત્યારથી મને જરૂર જણાઇ હતી. છઠ્ઠા ધોરણ-નો અભ્યાસ કરનારા વિદ્યાર્થીને અને ટ્રેનિંગ કાલેજના સ્કા-લરોને એવી ચોપડી વગર ઘણી અડચણ પડતી જાણવા-માં આવવાથી તે દૂર કરવાના ઇરાદાથી તથા અંકગણિતનું જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને બરાબર મળી શકે એ ઇરાદાથી આ નાનું પુસ્તક બહાર પાડ્યું છે.

એ પુસ્તકમાં સરકારી અંકગણિતમાં જેટલા વિષયો આપેલા છે તેનાં કારણ ઉપરાંત ઇષ્ટરાશી, બંને જાતની

શ્રેઢીનાં કારણો તથા સંખ્યાનો પાયો, જેટલી બની શકે તેટલી સહેલી ભાષામાં, ટૂંકામાં સ્પષ્ટતાથી સમજાવવા યત્ન કર્યો છે તથા અમુક રીતોના મિશ્રણથી કેવા પ્રકારના દાખલા થઈ શકે છે તે પણ જ્યાં જરૂર જણાઇ ત્યાં આપ્યું છે. મતલબ કે જેમ બને તેમ વિદ્યાર્થીઓને આ ચોપડી ઉપયોગી થઈ પડે તેવો, બની શકે તેટલો પ્રયત્ન કર્યો છે. મારો એ પ્રયત્ન કેટલો સફળ થયો છે તે તેના ઉપયોગ થવા ઉપરથી સમજાશે.



अंकगणितनां कारण.

આપણી સંખ્યાનો પાયો દશનો કહેવાયછે તેનું કારણ.

કોઇપણ સંખ્યા ૦, ૧, ૨, ૩, ૪, ૫, ૬, ૭, ૮, ૯ એ દશ આંકડાવડે બનાવાયછે. એમાં ૦ ની કીંમત કાંઈ નથી, ૧ ની કીંમત એક, ૨ ની કીંમત બેવાર એક અથવા બે. ૯ની કીંમત નવ વાર એક અથવા નવ. એવા એક જાતના કેટલાક એકમો એકઠા કરવાથી સંખ્યા થાય છે. એ સંખ્યા બે આંકડાથી બનાવાય ત્યારે તેમાં પહેલો અથવા ડાબા હાથ ભણીનો આંકડો દશક કહેવાય છે, કેમકે એકમ કરતાં તે દશ ગણો હોય છે. જેમ ૩૫ એમાં ત્રણ એ દશક છે કેમકે ત્રણ એકમ દશવાર ને પાંચ એકમ મળીને એ રકમ થએલી છે. એજ પ્રમાણે દશકની પહેલાં (ડાબા હાથ ભણી) એક આંકડો હોય તો તે શતક કહેવાય છે, કેમકે એકમ કરતાં તે સો ગણો અથવા દશક કરતાં દશ ગણો હોય છે. જેમકે ૩૨૫ એમાં ત્રણ એ શતક છે, કેમકે સો વાર ત્રણ એકમ, લેવાથી થાય છે, અથવા ત્રણ દશક દશવાર લેવાથી થાય છે. એ પ્રમાણે આપણી સંખ્યામાં જમણા હાથ ભણીના આંકડાના સ્થાન કરતાં દરેક ડાબા હાથ ભણીના આંકડાનું સ્થાન દશ દશ ગણું વધતું જાયછે અને તેથીજ આપણી સંખ્યાનો પાયો દશનો કહેવાય છે.

સરવાળો.

સરવાળાની રીતનું કારણ.

એક કરતાં વધારે સંખ્યાઓને એકઠી કરવાની રીતને સરવાળો કહે છે. સરવાળો કરવાને સુગમ પડે માટે એક સંખ્યાની નીચે બીજી, ને તેની નીચે ત્રીજી, અને તેમાં પણ પહેલી

સંખ્યાના એકમ નીચે બીજીનો એકમ, દશક નીચે દશક એ પ્રમાણે લખાવછે, પછી બધી સંખ્યાના એકમો એકઠા કરી તેમાંથી જેટલા દશક નીકળે તેટલા કહાડી દશકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરવા ને વધેલા એકમ, એકમના સ્થાનમાં લખવા. દશકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાંથી શતક નીકળે તો કહાડી તેને શતકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરવા, ને વધેલા દશક, દશકના સ્થાનમાં લખવા. એજ પ્રમાણે આગળ પણ કરતા જવું.

સરવાળો સજાતિય સંખ્યાઓનો કે સાદી સંખ્યાઓનોજ થાય, કેમકે પાંચ રૂપિઆમાં આઠ રૂપિઆ ઉમેરાય પણ આઠ ઘર ઉમેરાય નહીં, તેમજ સરવાળો એકમના સ્થાનથી કરાય, કેમકે એકમમાંથી દશક નીકળે તે દશકના સ્થાનમાં ઉમેરતાં સુગમ પડે, પણ દશકના સ્થાનના અંકોનો સરવાળો પ્રથમ મૂક્યા પછી એકમ સ્થાન અંકોના સરવાળામાંથી દશક નીકળે તે ઉમેરવા પડે ત્યારે પ્રથમ મૂકેલા દશક રદ કરવા પડે અને એ પ્રમાણે પહેલાંના અંકોના સરવાળામાં પણ હરકત આવે તે હરકત દૂર કરવાનેજ સરવાળો જમણી તરફથી કરીએ છીએ. પણ જો દરેક સ્થાનના અંકોનો સરવાળો દશની અંદર થતો હોય તો તે સરવાળો ડાબી તરફથી કરવામાં પણ કાંઇ હરકત પડતી નથી. પણ એ પ્રમાણે કોઇકજ વાર બને છે, અને તેથી જમણી તરફથી સરવાળો કરવાની રીત રાખી છે.

બાદબાકી.

બાદબાકીની રીતનું કારણ.

બાદબાકી પણ સજાતિય સંખ્યાનીજ થાય અને તે સરવાળાની પેઠે મોટી સંખ્યાના એકમની નીચે નાની સંખ્યાના એકમ અને દશકની નીચે દશક મૂકીને લખાય અને બાદબાકી કરવાની રીત પણ સરવાળાની પેઠે એકમથી

શરૂ થાય છે. મોટીના એકમમાંથી નાનીના એકમ બાદ કરવા પણ જો મોટીના એકમ ઓછા હોય તો તેના દશકમાંથી એક દશક લેઇ તેના દશ એકમ, એકમમાં ઉમેરી તેમાંથી બાધાંકના એકમ બાદ કરવા. પછી અધિકાંકના દશકમાંથી એક દશક લીધો હતો તે, તેમાંથી ઓછો કરવાને બદલે બાધાંકના દશકમાં એક ઉમેરી અધિકાંકના દશકમાંથી બાદ કરીએતો પણ ચાલે. પણ જો તે બાદ થઈ ન શકતા હોય તો એકમની પેઠે દશકમાં પણ એક શતક લેઇ તેના દશ દશક ઉમેરી ઉપર પ્રમાણે કરવુ. આ પ્રમાણે હલકા સ્થાનથી બાદબાકી કરવાનું સરવાળાની માફક સુગમ પડે છે તેથી બાદબાકી પણ જમણી તરફથી કરવાની રીત રાખી છે.

ગુણાકાર.

એકની એક સંખ્યા કેટલીક વખત લેઇ તેનો સરવાળો કરવાની સહેલી રીતને ગુણાકાર કહે છે. જેમકે ચારરૂપિઆ પાંચવાર લેઇએ તો ચાર રૂપિઆને પાંચવાર મૂકી સરવાળો કરવાથી અને ચાર રૂપિઆને પાંચે ગુણવાથી ૨૦ રૂપિઆ આવશે. આમાં ચાર રૂપિઆને ગુણ્ય, પાંચને ગુણક અને ૨૦ રૂપિઆને ગુણાકાર કહે છે. ગુણાકારમાં ગુણ્ય અને ગુણક બંને અથવા એમાંથી એક સાદી સંખ્યા જોઇએ, પણ બંને સંયુક્ત સંખ્યા ન જોઈએ. ચાર ને પાંચ ગણા કરાય અથવા ચાર રૂપિઆને પાંચ ગણા કરાય, પણ ચાર રૂપિઆને પાંચ રૂપિઆ ગણા કે પાંચ ઘર ગણા ન કરાય એ સ્પષ્ટ છે.

કોઈ સંખ્યાને શૂન્યે ગુણીએ તો ગુણાકાર શૂન્ય આવે તેનું કારણ.

કોઇ પણ સંખ્યાને એકે ગુણીએ તો ગુણાકાર તે સંખ્યા જેટલો આવે, પણ શુન્યે ગુણીએ તો ગુણાકાર શુન્ય આવે, કેમકે ચારને એકગણા કરીએ અથવા એકવાર લે-

ણીએ તો ચાર આવે પણ અરધાવાર લેઈએ તો બે, પા વાર લેઇએતો એક, ને ⅛ વાર લેઈએ તો ૦॥, એમ ગુણક ઘટાડતા જઈએ તેમ ગુણાકાર ઘટતો જાય છે. એ ઉપરથી સમજાયછે કે ગુણક ઓછામાં ઓછો લેઇએ તો ગુણાકાર ઓછામાં ઓછો આવે, ને ગુણક જેની કીંમત કાંઇ નથી, તેવો (શુન્ય) લેઈએ તો ગુણાકાર શુન્યજ આવે એ દેખીતું છે.

ગુણાકાર જમણી તરફથી કરીએછીએ તેનું કારણ.

ગુણાકાર પ્રથમ જમણી તરફથી કરીએ† છીએ, કેમકે આપણે સંખ્યા લખવામાં જમણી તરફ એકમ, તેની ડાબી તરફ દશક, એ પ્રમાણે દશ દશ ગણા ચડતા અંક ડાબી તરફ લખીએછીએ. હવે એકમનો ગુણાકાર કરતાં તેમાંથી દશક નીકળે તે કહાડી, દશકના ગુણાકારમાં ઉમેરવો જોઇએ, ને દશકના ગુણાકારમાંથી શતક નીકળે તે શતકના ગુણાકારમાં ઉમેરવો જોઇએ. પણ તેમ કરવું ડાબી તરફથી ગુણાકાર કરતા આવીએ તો બહુ અવઘડ પડે માટે જમણી તરફથી ગુણાકાર શરૂ કરીએ છીએ, કે જેથી એકમના ગુણાકારમાંથી નીકળેલા દશકને અને દશકના ગુણાકારમાંથી નીકળેલા શતકને ઉમેરતાં સુગમ પડે.

ગુણાકારમાં એક એક અંક કાપીએ છીએ તેનું કારણ.

ગુણાકારમાં એક એક અંક કાપીએ છીએ કેમકે ગુણ્યને એકમે ગુણ્યા પછી ગુણકના દશકે ગુણીએ છીએ. એટલે પ્રથમ અંક દશકનો આવશે, ને પહેલાં એકમે ગુણેલી સંખ્યામાં પ્રથમ અંક એકમનો છે તે એકમ નીચે દશકનો અંક મૂક્યાથી સરવાળો કરવાને અડચણ પડે માટે એકમના

† શીખનાર ગુણાકાર ભાગાકારની રીત શીખી ગએલા છે ને તે રીત અંકગણિતમાં છે માટે તે રીતો નહિ આપતાં તેનાં કારણજ માત્ર આપીશું. તોપણ જ્યાં તે રીત આપ્યા વગર કારણ સમજાય તેમ નહિ હોય, ત્યાં તે રીત પણ આપીશું ખરા.

ગુણાકારમાંના દશકની નીચે દશકના ગુણાકારનો પહેલો અંક અથવા દશક મૂકીએ છીએ. અથવા પ્રથમ એકમે ગુણ્યા પછી બીજા અંકે (દશકે) ગુણવાના છે એટલે દશકના ગુણાકાર ઉપર એક મીડું આવશે. તેમજ શતકે ગુણીએ તો તે ગુણાકાર ઉપર બે મીંડાં મૂકવાને બદલે દશકના ગુણાકાર ઉપર એક મીડું નહિ મૂકતાં એક અંક કાપીએછીએ અને શતકના ગુણકાર ઉપર બે મીડાં મૂકવાને બદલે એકમના ગુણાકારમાંથી બે અને દશકના ગુણાકારમાંથી એક અંક કાપીને મૂકીએ છીએ.

ભાગાકાર.

એક સંખ્યામાંથી બીજી નાની સંખ્યા કેટલી વખત બાદ જઇ શકે છે અથવા એક સંખ્યામાં બીજી નાની સંખ્યા કેટલી વાર રહેલી છે તે કહાડવાની સહેલી રીતને ભાગાકાર કહે છે. જેમકે ૨૦ રૂપિઆમાં ચાર રૂપિઆ કેટલી વાર રહેલા છે. તે ૨૦ રૂપિઆમાંથી ચાર રૂપિઆ પાંચવાર બાદ કરીશું અથવા ૨૦ રૂપિઆને ચાર રૂપિએ ભાગીશું તો પણ નીકળશે. આમાં ૨૦ રૂપિઆને ભાજ્ય, ચાર રૂપિઆને ભાજક ને પાંચને ભાગાકાર કહે છે. આ ઉપરથી માલમ પડશે કે ભાજ્ય. ભાજક ને ભાગાકાર એ ત્રણ પદોમાંથી એક સાદી સંખ્યા જોઇએ અને સંયુક્ત સંખ્યા સજાતિય જોઇએ કેમકે ૨૦ રૂપિઆમાંથી ચાર રૂપિઆના ભાગ કરીએ તો પાંચ રૂપિઆ નહિ આવે અથવા ૨૦ રૂપિઆના પાંચ ભાગ કરીએ તો દરેક ભાગ ચાર રૂપિઆનો આવે પણ ૨૦ રૂપિઆમાંથી પાંચ ઘર જેટલા ભાગ ન થાય.

ભાગાકાર ડાબી તરફથી કરીએછીએ તેનું કારણ.

ભાગાકાર ડાબી તરફથી પ્રથમ શરૂ કરીએ છીએ કેમકે ડાબી તરફના અંક દશ દશ ગણા વધારેછે ને જમણી તરફના અંક દશ દશ ગણા હલકાછે. હવે પ્રથમ ભાગે અં-

કને ભાગતાં જે વધે તેને તેની પાસેના ડાબી તરફના અંક સ્થાનનું રૂપ કરવાને દશે ગુણી તે સ્થાનનો અંક ઉમેરી તેને ભાજકે ભાગવા જોઈએ. દશે ગુણવાથી તે ગુણ્ય ઉપર એક મીડું આવે છે ને તેમાં તે સ્થાનનો અંક ઉમેરવાથી મીડાની જગાએ તે અંક આવેછે. આ પ્રમાણે કરવું સહેલું પડેછે. પણ જો એકમથી ભાગતા જઈએ તો જે શેષ વધે તેને તેની પાસેના ડાબી તરફના અંક સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ભાગવા પડે એટલે અપૂર્ણાંક આવે. ને તેમાં તે સ્થાનનો અંક ઉમેરી ભાગવાથી અપૂર્ણાંક ભાગાકાર થશે. એ રીતે જેમ જેમ આગળ કરતા જઇશું તેમ તેમ અપૂર્ણાંક વધતો જશે, અને તેથી મુસ્કેલી પણ વધશે. વળી ભાગાકારમાં પણ ભારે અંકને ભાગતાં ભારે અંક આવશે અને તેના પછીનો તેથી દશ ગણો હલકો આવશે એટલે સંખ્યા લખવાના આપણા નિયમને અનુસરતું થશે. પણ એકમને ભાગતાં પ્રથમ એકમ, પછી દશક, એમ આવ્યાથી ભાગાકારની સંખ્યા ગોઠવવામાં પણ અડચણ પડવાની. આ બેવડી અડચણ પહેલી રીતે કરવામાં નડતી નથી, માટે ભાગાકાર ડાબી તરફથી શરૂ કરીએછીએ.

ભાગાકાર કરતાં એક એક અંક ચઢાવવાની રીતનું કારણ.

આપણે ઉપર કહી ગયા કે પ્રથમ ભારે સ્થાનના અંકને ભાગતાં શેષ વધે તેને તેની પાસેના હલકા સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ગુણી તે સ્થાનનો અંક ઉમેરવો જોઇએ; પણ દશે ગુણતાં ગુણ્ય ઉપર મીડુ આવે છે ને તેમાં તે અંક ઉમેરવાથી મીડાની જગાએ ઉમેરવાનો આવે છે એટલે દશે નહિ ગુણતાં પાસેના સ્થાનનો અંક શેષ ઉપર જમણી તરફ એકદમ ચઢાવી દેઇએછીએ કેમકે તેથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી પણ જો શેષમાં પાણો વધી હોય તો દશે ગુણીનેજ તેની પાસેના હલકા સ્થાનનો અંક ઉમેરવો પડેછે.

અવયવ પાડીને ભાગાકાર કરીએ ત્યારે શેષ કેટલા વધ્યા તે જાણવાની રીતનું કારણ–જો બે અવયવ હોય તો બીજા અવયવે ભાગતાં જે શેષ વધ્યા હોય તેને પહેલા અવયવે ગુણી તેમાં પહેલા અવયવનો શેષ ઉમેર્યાથી ખરો શેષ આવશે. જો ત્રણ અવયવ હોય તો ત્રીજા અવયવના શેષને બીજા અવયવે ગુણી તેમાં બીજા અવયવનો શેષ ઉમેરવો, ને તેને પહેલા અવયવે ગુણી તેનો શેષ ઉમેરવો. એટલે ખરો શેષ આવશે. કેમકે પહેલા અવયવે ભાગ્યાથી જે ભાગાકાર આવશે તે, તે અવયવ ગણો આવશે, તેને બીજા અવયવે ભાગ્યાથી વધેલો શેષ પહેલા અવયવ ગણો હોય માટે તેને સાદું રૂપ લાવવાને પહેલા અવયવ ગણા કરવા જોઈએ.

કોઈ સંખ્યાને શુન્યે ભાગીએ તો ભાગાકાર અનંત આવે તેનું કારણ.–કોઇ સંખ્યાને એકે ભાગવાથી ભાગાકાર તેજ સંખ્યા આવે છે ને અરધે ભાગ્યાથી બમણા, પાએ ભાગ્યાથી ચોગણા એ રીતે ભાજક જેટલા ગણો ઘટાડીએ તેટલા ગણો ભાગાકાર આવેછે તો ભાજક શુન્ય (જેની કીમત કાંઇ નથી) હોય તો ભાગાકાર અનંત આવે એ દેખીતું છે.

ગુણાકાર એ સરવાળાની ને ભાગાકાર એ બાદબાકીની સહેલી રીત છે.

ઉપરની ચાર રીતો ઉપરથી અંકગણિતના કેટલાક દાખલા કરવાને બીજી રીતો ઉત્પન્ન કરવી પડેછે. તે ઉપયોગી જાણી કારણ સહીત તે રીતો આ નીચે આપીછે.

કોઈ બે રકમોનો સરવાળો ને તેજ બે રકમોની બાદબાકી આપી હોય તો તે ઉપરથી એ બે રકમો કહાડવી હોય તો તે બે રકમોના સરવાળામાં બાદબાકી ઉમેરી બેએ ભાગવા એટલે બેમાંની એક મોટી રકમ આવશે, તે સરવાળામાંથી બાદ કર્યાથી નાની રકમ નીકળશે. અથવા આપેલા સરવાળામાંથી આપેલી બાદબાકી બાદ કરી, બેએ ભા-

આથી નાની રકમ નીકળશે, એ નાની રકમ સરવાળામાંથી બાદ કરવાથી મોટી રકમ નીકળશે.

કારણ.—બે સંખ્યાના સર્વાળામાં મોટી ને નાની બંને છે, માટે સરવાળો ને બાદબાકી ભેગાં કરીએ તો તે મોટીની બમણાઇ બરાબર થાય, એટલે તેને બે એ ભાગવાથી મોટી નીકળે, તેમજ સરવાળામાંથી બાદબાકી બાદ કરીએ, તો બે નાની બરાબર થાય, માટે તેને બેએ ભાગ્યાથી નાની નીકળે. અક્ષર ગણિતના નિયમો જાણનારા ઉપલી રીતોનું કારણ નીચલા સમિકરણ ઉપરથી જલદીથી સમજશે.

મોટી + નાની = સરવાળો

મોટી − નાની = બાદબાકી

સરવાળાથી ૨ મોટી = સરવાળો + બાદબાકી

તો મોટી = (શરવાળો + બાદબાકી) / ૨

તેમજ મોટી + નાની = સરવાળો.

મોટી − નાની = બાદબાકી.

બાદબાકીથી ૨ નાની = સરવાળો − બાદબાકી

તો નાની = (સરવાળો − બાદબાકી) / ૨

ગુણ્ય, ગુણક અને ગુણાકાર એ ત્રણમાંથી કોઈ પણ બે પદ આપ્યાં હોય, તે ઉપરથી બાકીનું ત્રીજું પદ કહાડવાનું.

જો ગુણ્યને ગુણક આપ્યા હોય, તો રીત પ્રમાણે ગુણવાથી ગુણાકાર નીકળશે. પણ જો ગુણાકારને ગુણ્ય આપ્યા હોય તો ગુણાકારને ગુણ્યે ભાગ્યાથી ગુણક નીકળશે. ને ગુણાકારને ગુણક આપ્યા હોય તો ગુણાકારને ગુણકે ભાગ્યાથી ગુણ્ય નીકળશે.

કારણ.—ગુણ્યના ગુણક ગણો ગુણાકાર છે. માટે ગુણાકારના ગુણકગણા ઓછા કરવાથી ગુણ્ય, ને ગુણ્ય ગણા-ઓછા કરવાથી ગુણક નીકળે, એ દેખીતુંજ છે.

ઉપરની રીત ઉપરથી નીચેના કોઠા નીકળેલા છે.

ગુણાકાર=ગુણ્ય×ગુણક. ગુણ્ય=ગુણાકાર÷ગુણક.

ગુણક=ગુણાકાર÷ગુણ્ય.

ભાજ્ય, ભાજક, ભાગાકાર ને શેષ, એ ચારમાંથી કોઇ પણ ત્રણવાનાં આપ્યાં હોય તો ચોથું પદ કહાડવાનું.—

જો ભાજ્યને ભાજક આપ્યા હોયતો ભાજ્યને ભાજકે ભાગવાથી ભાગાકાર ને શેષ બંને નીકળશે. પણ જો ભાગાકાર, ભાજકને શેષ આપેલા હોય તો ભાગાકાર ને ભાજકના ગુણાકારમાં શેષ ઉમેરવાથી ભાજ્ય આવશે. ને ભાગાકાર, ભાજ્યને શેષ આપ્યા હોયતો ભાજ્યમાંથી શેષ બાદ કરી ભાગાકારે ભાજ્યને ભાગ્યાથી ભાજક નીકળશે,

કારણ.—ભાજ્યને ભાજકે ભાગવાથી ભાગાકાર આવે છે, ને શેષ વધે છે, માટે ભાગાકારને ભાજકે ગુણી શેષ ઉમેરવાથી ભાજ્ય આવે. તેમજ ભાજ્યએ ભાગાકારને ભાજકના ગુણાકારમાં શેષ ઉમેર્યા જેટલો છે, માટે ભાજ્યમાંથી શેષ બાદ કરી ભાગાકારે ભાગ્યાથી ભાજક આવશે.

ઉપરની રીત ઉપરથી નીચેના કોઠા નીકળેલા છે.

શેષ=ભાજ્ય−(ભાગાકાર×ભાજક)

ભાગાકાર=(ભાજ્ય−શેષ)÷ભાજક

ભાજક= ભાજ્ય−શેષ ÷ભાગાકાર

ભાજ્ય=(ભાગાકાર×ભાજક)+શેષ.

દૃઢભાજક.

જો એક સંખ્યા, બીજી બેઅથવા વધારે સંખ્યામાંની દરેકને કાંઇ પણ શેષ વધ્યા સિવાય ભાગી શકે તો તે સંખ્યા બીજી સંખ્યાઓનો સાધારણ નિઃશેષ ભાજક છે. એવો બે અથવા વધારે સંખ્યાઓનો જે મોટામાં મોટો સાધારણ નિઃશેષ ભાજક તે દૃઢભાજક. જેમકે ૭૨,૯૬, ૧૪૪,

એનો બે, ચાર, છ, બાર, ચોવીશ, એ સાધારણ નિઃશેષ ભાજક છે, પણ દૃઢભાજક તો ચોવીશજ કહેવાય.

દૃઢભાજકની રીતનું કારણ—આપેલી બે સંખ્યામાંની નાની સંખ્યા, મોટીનો નિઃશેષ ભાજક હોય, તો તે નાની સંખ્યાજ બંને સંખ્યાનો દૃઢભાજક થશે; પણ નાની સંખ્યા, મોટીનો નિઃશેષ ભાજક ન હોય, ને જે શેષ વધે, તે નાની સંખ્યાનો નિઃશેષ ભાજક હોય, તો તે શેષ નાની સંખ્યા ને મોટી સંખ્યાનો નિઃશેષ ભાજક થશે, એટલે દૃઢભાજક થશે. કેમકે જો શેષ નાની સંખ્યાને નિઃશેષ ભાગી શકે છે, તો તે નાની સંખ્યાના અમૂક ગણાને પણ ભાગી શકે છે. અથવા તેમાં શેષ ઉમેરીએ તેને પણ નિઃશેષ ભાગી શકે છે. હવે મોટી સંખ્યા તે નાની સંખ્યાવત્તા શેષ, અથવા નાની સંખ્યાના અમૂક ગણા, વત્તા શેષની બરાબર છે. માટે નાની સંખ્યાએ મોટી સંખ્યાને ભાગતાં વધેલો શેષ, જો નાની સંખ્યાને નિઃશેષ ભાગી શકે, તો તે મોટી સંખ્યાને પણ નિઃશેષ ભાગી શકે, એટલે એ શેષજ આપેલી બંને સંખ્યાનો દૃઢભાજક થશે. પણ જો તે શેષ (પહેલો શેષ) નાની સંખ્યાને નિઃશેષ ભાગી ન શકે, ને શેષ વધે, તો એ બીજો શેષ પહેલા શેષને નિઃશેષ ભાગી શકે છે કે નહિ, તે જોવું. જો ભાગી શકે, તો એ બીજો શેષ, આપેલી બંને સંખ્યાનો પણ નિઃશેષ ભાજક થશે. કેમકે નાની સંખ્યા એ પહેલા શેષમાં બીજો શેષ ઉમેર્યાથી જે આવે તેટલી, અથવા પહેલા શેષના અમૂક ગણાવત્તા બીજા શેષ જેટલીછે. અને મોટી સંખ્યા, એ નાની સંખ્યા, અથવા નાની સંખ્યાના અમૂક ગણાવત્તા પહેલા શેષ જેટલી છે. જેમકેઃ—

૨૪ અને ૫૭ નો દૃઢ ભાજક કાઢવો હોય તો.

આમાં ૯ પહેલો, ૬ બીજો અને ત્રણ એ ત્રીજો શેષછે. હવે જો ત્રણ છ ને નિ:શેષ ભાગી શક્યો તો તે નવને પણ ભાગી શકશે. કેમકે ત્રણ એ છ ને અને ત્રણ ને નિ:શેષ ભાગી શકેછે; તો તે તેના સરવાળાને પણ નિ:શેષ ભાગી શકશે તેમજ ત્રણ જો નવ ને ભાગી શકે, તો તે ૨૪ ને અને ૫૭ ને પણ ભાગી શકશે, કેમકે ૨૪ એ બે વાર નવ+૬ ની બરાબર છે. હવે જો ત્રણ એ નવને અને છને નિ:શેષ ભાગી શકેછે, તો તે નવના બમણા અને છના સરવાળાને પણ ભાગી શકેછે તેમજ ૫૭ એ બે વાર ચોવીસ+નવછે ને ત્રણએ ચોવીસને અને નવને ભાગી શકે છે, તો તે બે વાર ચોવીસ+નવને એટલે ૫૭ને પણ ભાગી શકે છે તેથી ૨૪ અને ૫૭ નો દૃઢ ભાજક ત્રણજ છે.

```
૨૪|૫૭|૨
   ૪૮
   ---
   ૯|૨૪|૨
     ૧૮
     ---
     ૬|૯|૧
       ૬
       ---
       ૩|૬|૨
         ૬
         ---
         ૦
```

બે કરતાં વધારે સંખ્યાના દૃઢભાજકની રીતનું કારણ:-

જો ૨૪, ૫૪, ૬૯ એનો દૃઢભાજક કાઢવો હોય તો ૨૪ ને ૫૪ નો દૃઢભાજક ૬ આવશે અને છ અને ૬૯ નો ત્રણ આવશે; માટે એ ત્રણે સંખ્યાનો દૃઢભાજક ત્રણ આવશે. કારણ કે ૨૪ અને ૫૪ નો દૃઢ ભાજક છ આવશે, પણ તે ૬૯ નો નિ:શેષ ભાજક નથી, માટે છ અને ૬૯ નો દૃઢભાજક ત્રણ આવ્યો, તેજ ૨૪ અને ૫૪ નો પણ દૃઢભાજક થશે, કેમકે જે છ નો નિ:શેષ ભાજક હોય, તે છ ના સાધારણ નિ:શેષ ભાજ્ય ૨૪ અને ૫૪ નો પણ નિ:શેષ ભાજક થવાનો.

લાલશંકરના નવા અંકગણિતના ૧૨ મા મનોયત્નનો ૧૦ મો દાખલો દૃઢભાજકની રીતે શાથી કરવો, તે આ ઉપર લગાર વિચાર કરવાથી સમજાશે.

કોઈ સંખ્યાના નિઃશેષ ભાજક શોધી કહાડવાની રીત ને કારણ.

કોઈ સંખ્યાને છેડે એક મીડું હોય તો દશે, બે મીડાં હોય તો સોએ અને ત્રણ મીડાં હોય તો હજારે તેને નિશેષ ભાગી શકાશે. કેમકે તે સંખ્યા એ ભાજ્ય અને દશ, સો, હજાર, એ ભાજક છે, ને ભાજકને ભાગાકારનો ગુણાકાર ભાજ્ય છે. ગુણાકારમાં ગુણ્યને ગુણકનાં મીડાં ગુણાકાર ઉપરજ આવેછે. માટે ગુણાકારમાં (ભાજ્યમાં) જેટલાં મીડાં હોય તેટલાં મીડાં ગુણ્યમાં (ભાજકમાં) હોય તો ગુણકમાં (ભાગાકારમાં) મીડું હોય નહીં. એટલે તે સંખ્યામાંથી મીડું બાદ કરતાં બાકી રહશે તે ભાગાકાર આવશે. આ ઉપરથી ઉપરનું કારણ સમજાશે.

જે સંખ્યાને છેડે એકમ બેકી હોય અથવા શુન્ય હોય તે સંખ્યાને બેએ નિઃશેષ ભાગી શકાશે કારણ કે દશક, શતક, ઈત્યાદિ અંકોને બેએ નિઃશેષ ભગાય છે; ને જો એકમને બેએ નિઃશેષ ભગાયતો તે આખી સંખ્યાને બેએ નિઃશેષ ભાગી શકાશે. ને બેકી એકમને બે નિઃશેષ ભાગી શકે છે, માટે આખી સંખ્યાનો બે નિઃશેષ ભાજક થશે.

કોઈ સંખ્યાના દશકને એકમના અંકોને ચાર અને પચીશ નિઃશેષ ભાગી શકે તો તે આખી સંખ્યાને પણ નિઃશેષ ભાગી શકશે. કેમકે ચાર અને પચીશ એ સો, હજાર, દશહજાર, એ અંકોને તો નિઃશેષ ભાગે છેજ. એટલે જો તે સંખ્યાના છેલ્લા બે અંક (દશક ને એકમ)ને ચાર અને પચીશ નિઃશેષ ભાગી શકતા હોય તો તે આખી સંખ્યાના પણ નિઃશેષ ભાજક થશે.

કોઇ સંખ્યાનો એકમ પાંચ હોય અથવા એકમની જગ્યોએ શુન્ય હોય તો તે સંખ્યાનો પાંચ એ નિઃશેષ

ભાજક થશે, કેમકે પાંચ એ દશક, શતક ઇત્યાદિને તેા નિઃ-શેષ ભાગે છેજ.

કેાઈ સંખ્યાના છેલ્લા ત્રણ અંકેાને આઠ અને એકસેા પચીશ નિઃશેષ ભાગી શકશે, તેા તે આખી સંખ્યાને પણ નિઃશેષ ભાગી શકશે. કેમકે હજાર, દશહજાર ઇત્યાદિ અંકેાને તેા આઠ અને એકસેા પચીશ નિઃશેષ ભાગે છેજ.

કેાઈ સંખ્યાના બધા અંકેાના સરવાળાને ત્રણે અથવા નવે‡ નિઃશેષ ભગાતા હેાય તેા તે આખી સંખ્યાને પણ ત્રણે અથવા નવે નિઃશેષ ભગાશે. કારણ કે કેાઇ એકમને ત્રણે અથવા નવે ભાગતાં જેટલા શેષ વધે, તેટલાજ તેના ઉપર ગમે તેટલાં મીંડાં ચઢાવીને ભાગ્યાથી પણ વધશે. ૪ ને ત્રણે ભાગતાં એક વધે છે, તેા ૪૦, ૪૦૦ ઈત્યાદિને ભાગતાં પણ એક વધશે. પાંચને ભાગતાં બે વધેછે તેા ૫૦ને ૫૦૦ને ભાગતાં પણ બેજ વધવાના. ચારને ત્રણે ભાગતાં એક વધેછે, તેા ૪૧ને ભાગતાં બે વધશે ને ૪૨ને ભાગતાં શુન્ય વધશે, કેમકે ચારને ભાગતાં એક વધેછે તેમ બેને ભાગતાં એક ખૂટેછે. તેમજ પાંચને ત્રણેભાગતાં બેવધેછે, તેા ૫૦૧ને ભાગતાં કાંઇ નહીં વધે, કેમકે પાંચને ભાગતાં બે વધ્યા તેમ પાંચસેાને ભાગતાં પણ બે વધશે ને એકને ભાગતાં બે ખૂટશે, એટલે બરાબર થઇ રહેશે. આ ઉપરથી એવેા નિયમ નીકળેછે કે કેાઈ સંખ્યાના અંકેાના સરવાળાને ત્રણે નિઃશેષ ભગાસે, તેા તે આખી

‡ નવના એ ગુણને લીધે કેાઈ સંખ્યાના અંકેાના સરવાળાને નવે ભાગતાં જેટલા વધે તેટલા તે સંખ્યામાંથી બાદ કરવાથી નવે નિઃશેષ ભગાશે, અથવા તે વધારામાં નવ કે નવના અમૂક ગણા બાદ કરી નવે ભાગવાથી પણ નિઃશેષ ભગાશે. તેમજ તે સંખ્યામાંથી તે સંખ્યાના અંકેાને ગમે તેમ ફેરવ્યાથી જે સંખ્યા થાય તે બાદ કરે તેા તે બાદબાકીને પણ નવે નિઃશેષ ભાગી શકાશે.

સંખ્યાને પણ ભાગી શકાશે. ત્રણનાઉપરથી નવનું કારણ પણ સમજાશે, કેમકે જે ત્રણનું કારણછે તેજ નવનું કારણ છે.

જે સંખ્યાને ત્રણ નિઃશેષ ભાગી શકે તે સંખ્યાનો એકમ બેકી હોય તો તેને છએ પણ નિઃશેષ ભાગી શકાશે, કેમકે છેવટ એકીવાળી જે સંખ્યાને ત્રણ નિઃશેષ ભાગી શકે, તે સંખ્યાના બમણાને ત્રણથી બમણા છ પણ નિઃશેષ ભાગી શકે એ દેખીતું છે, ને એકી એકમવાળી સંખ્યાને બમણી કરવાથી બેકી એકમ વાળી સંખ્યા થશે તેથી ઉપલો નિયમ નીકળ્યો છે.

કોઇ સંખ્યાના એકી સ્થળોના અંકોનો સરવાળો બેકી સ્થળોના અંકોના સરવાળા બરોબર હોય અથવા એ બે સરવાળાના અંતરને અગીઆરે નિઃશેષ ભગાતા હોય તો તે આખી સંખ્યાને અગીઆરે નિઃશેષ ભાગી શકાશે.

કારણ.–આ નિયમનું કારણ ત્રણને નવના કારણને મળતુંજ છે. એકમ, શતક, દશહજાર ઇત્યાદિ એકી સ્થળો અને દશક, હજાર, લાખ એ બેકીસ્થળો છે.

કોઇ દશકને અગીઆરે ભાગતાં જેટલા ખૂટે છે તેટલાજ તેટલા શતકને ભાગતાં વધે છે, જેમકે બે દશક ૨૦ ને અગિઆરે ભાગતાં બે ખૂટે ત્યારે ૨૦૦ ને અગિઆરે ભાગતાં બે વધે એટલે ૨૨૦ને અગિઆર નિઃશેષ ભાગી શકે. તેમજ જેટલા હજારને અગિઆરે ભાગતાં જેટલા ખૂટે છે તેટલાજ તેટલા દશહજારને ભાગતાં વધે છે. જેમકે ૧૦૦૦ ને આગીઆરે ભાગતાં એક ખૂટે ત્યારે ૧૦૦૦૦ને અગિઆરે ભાગતાં એક વધે એટલે ૧૧૨૨૦ને અગિઆર નિઃશેષ ભાગી શકે. ને દશક, હજાર ઇત્યાદિ એકી સ્થળોને સો, દશહજાર ઇત્યાદિ બેકી સ્થળો છે માટે, એકી સ્થળોને અગીઆરે ભાગતાં જેટલી વધ થાય છે તેટલી બેકી સ્થળોને અગીઆરે ભાગતાં ઘટ જાય છે, તેથી બરાબર થઇ રહે છે. જે-

મકે ૪૭૬૭૪ આ સંખ્યામાં ૪૦૦૦૦+૬૦૦+૪ એ દરેક એકી સ્થળોને અગીઆરે ભાગતાં ચૌદ વધે છે ત્યારે ૭૦૦૦ +૭૦ એ દરેક બેકી સ્થળને અગિઆરે ભાગતાં ચૌદ ઘટે છે તેથી બરાબર થઈ રહે છે. માટે એ આખી સંખ્યાને અગિઆર નિઃશેષ ભાગી શકશે અને એજ ઉપરથી ઉપલો નિયમ નીકળેલો છે.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય.

એ અથવા વધારે સંખ્યાઓનો નાનામાંનાનો સાધારણ ભાજ્ય તે, તે સંખ્યાઓનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહેવાય. જેમકે ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ આ સંખ્યાઓનો રીત પ્રમાણે ગણવાથી ૧૨૬૦ લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય આવશે.

૨	૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨
૨	૯, ૧૪, ૧૫, ૨૧
૩	૯, ૭, ૧૫, ૨૧
૭	૩, ૭, ૫, ૭
	૩, ૧, ૫, ૧

આમાં ૨, ૨, ૩, ૭, ૩, ૫ એ અવયવોનો ગુણાકાર કરવાથી ૧૨૬૦ આવશે.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવાની રીતનું કારણ.

૧૮=૨×૩×૩, ૨૮=૨×૨×૭, ૩૦=૨×૩×૫ ને ૪૨=૨×૩×૭ એ અવયવોથી થએલી છે. તે ઉપરથી માલમ પડે છે કે ૧૮ને ૨૮નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૨× ૨×૨×૩×૩×૭થી થવો જાઇએ; અને એ અવયવો વડેજ ૨×૩×૩ અથવા ૧૮ અને ૨×૨×૭ અથવા ૨૮ છે તેથી ૧૮ને ૨૮નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય, ૨×૨×૩×૩×૭એ સાધારણ અવયવોથીજ થવો જોઈએ, કેમકે એ અવયવો વડેજ ૨×૩×૩ અથવા ૧૮, ૨×૨×૭ અથવા ૨૮ થયા છે અને ૨×૩×૫ એ ૩૦ના અવયવ છે તેથી ૨×૨×૩×૩×૭×૫= ૧૮, ૨૮ ને ૩૦નો લઘુતમ સાધારણ ભાજ્ય થશે અને

૨×૩×૭ એ ૪૨ના અવયવ છે માટે ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૨×૨×૩×૩×૭×૫ એજ સાધારણ અવયવોથી થવો જોઈએ કેમકે એ અવયવો પંડેજ ૨×૩×૩ અથવા ૧૮, ૨×૨×૭ અથવા ૨૮, ૨×૩×૫ અથવા ૩૦ને ૨×૩×૭ અથવા ૪૨ના છે તેથી ૨×૨×૩×૩×૭×૫ એ ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ના લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્યના અવયવો છે માટે તેમનો ગુણાકાર ૧૨૬૦ એજ એ ચારે સંખ્યાનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય છે.

દૃઢભાજક અને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ઉપરથી કેટલીક રીતો થએલીછે તે ઉપયોગી જાણી કારણ સાથે નીચે લખી છે.

બે રકમોનો દૃઢભાજક અને તેજ બે રકમોનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય આપેલો હોય, અને એ બેમાંથી એક રકમ આપી હોય, તો બીજી રકમ કાહાડવાનું.-

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય અને દૃઢભાજકનો ગુણાકાર કરી આપેલી એક સંખ્યાએ ભાગ્યાથી બીજી સંખ્યા નીકળશે કેમકે-દૃઢભાજક એ બંને સંખ્યાનો મોટામાં મોટો સાધારણ નિઃશેષ ભાજક હોવાથી તે બે સંખ્યાના ગુણાકાર કરતાં લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય, દૃઢભાજક ગણો ઓછો આવશે. માટે આપેલા લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્યને દૃઢભાજક ગણા કરવાથી તે બે સંખ્યાનો ગુણાકાર આવશે. એટલે જવાબ સંખ્યા×આપેલી સંખ્યા=દૃઢભાજક×લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય થયો. માટે જવાબ=(દૃઢભાજક×લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય)÷આપેલી સંખ્યા. જેમકે બે રકમોનો દૃઢભાજક ૩ અને લઘુ. સા. ભાજ્ય ૬૦ ને બેમાંની એક સંખ્યા ૧૫ છે તો બીજી સંખ્યા કેટલી? તો— ૬૦×૩=૧૮૦ એ બે સંખ્યાનો ગુણાકાર, માટે ૧૮૦ ÷૧૫=૧૨ એ જવાબ.

તાળો-૧૨ ને ૧૫. નો દૃઢભાજક ૩, છે, ને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૬૦ છે.

૧૨|૧૫|૧
|૧૨
૩|૧૨|૪
૧૨
૦

૩|૧૨ – ૧૫
૪ × ૫×૩= ૬૦ આમાં ૬૦ એ, બે સંખ્યાના ગુણાકાર ૧૮૦ થી, દ્દઢભાજક ૩ગણા ઓછાછે, કેમકે ત્રણે ૧૨ ને ૧૫ બંનેને ભાગેલાછે.

અપૂર્ણાંકોનો દ્દઢભાજક અને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવાનું.–

દ્દઢભાજક—કોઈપણ બે અપૂર્ણાંકોનો દ્દઢભાજક કહાડવો હોય તો અંશે અંશનો અને છેદે છેદનો દ્દઢભાજક કહાડી, અંશનો દ્દઢભાજક અંશ સ્થળે અને છેદનો દ્દઢભાજક છેદ સ્થળે લખવો. જેમકે $\frac{૨૫}{૪}$ અને $\frac{૧૫}{૬}$ નો દ્દઢભાજક કાહાડવો હોય તો ૨૫ અને ૧૫ એ અંશોનો દ્દઢભાજક, ૫ એ અંશ સ્થળે, અને ૪ ને ૬ એ છેદોનો દ્દઢભાજક ૨ છેદ સ્થળે લખવાથી $\frac{૫}{૨}$ એ જવાબ. એનું કારણ ઉઘાડુંજ છે. પરંતુ જે અપૂર્ણાંકોના અંશોનો દ્દઢભાજક એક હોય એટલે અંશો અરસ્પરસ અવિભાજ્ય હોય તો તે અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ કર્યા પછી ઉપરની રીતે અંશ અને છેદનો દ્દઢભાજક કાહાડવો. જેમકે $\frac{૩}{૪}$ ને $\frac{૫}{૬}$ નો દ્દઢભાજક કાહાડવો હોય તો સમચ્છેદ કર્યાથી $\frac{૯}{૧૨}$ ને $\frac{૧૦}{૧૨}$ આવ્યા તેનો ઉપરની રીતે દ્દઢભાજક કહાડયાથી $\frac{૧}{૧૨}$ આવ્યા એ જવાબ.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજય—અપૂર્ણાંકોનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો હોય તો તે અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ કર્યા પછી અંશે અંશનો અને છેદે છેદનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો, અંશને અંશસ્થળે, અને છેદને છેદ સ્થળે લખવા. જેમકે $\frac{૩}{૪}$ અને $\frac{૫}{૬}$ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો હોય તો સમચ્છેદ કર્યાથી $\frac{૯}{૧૨}$ ને $\frac{૧૦}{૧૨}$ આવ્યા, પછી અંશનો લઘુતમ સાધારણ ભાજ્ય ૯૦ અને છેદનો ૧૨ આવ્યો એટલે $\frac{૯૦}{૧૨}$ અથવા $\frac{૧૫}{૨}$ એ જવાબ.

આણપાણના અપૂર્ણાંક.

આણપાણના ભાગાકારમાં શેષ પાણો આવે તો તે શેષને દશે ગુણી આગલો અંક ઉમેરીએ છીએ તેનું કારણ.—સાદા ભાગાકારમાં શેષ પાણો આવતી નથી, તેથી શેષમાં આગલો અંક ઉમેરવાને દશે ગુણ્યા વગર આગલો અંક ચહાવીએછીએ તોપણ ચાલેછે, પણ જ્યારે શેષમાં પાણો હોય ત્યારે આગલો અંક ઉમેરવાને તે પાણો વાળા શેષને તે ઉમેરવાના અંક સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ગુણવા જોઇએ કેમકે શેષનું અંકસ્થાન ઉમેરવાના અંકસ્થાન કરતાં દશગણું વધારે હોયછે—આ કારણ પાછળ ભાગાકારના કારણમાં પણ સમજાવી ગયા છીએ.

આણપાણના ભાગાકારમાં કોઈવાર દશે કે તેથી વધારેએ ભાગ ચલાવવો પડેછે, ને સાદા ભાગાકારમાં તેમ કરવું પડતું નથી, તેનું કારણ–સાદા ભાગાકારમાં વધારેમાં વધારે અંકે ભાગ કહાડયાથી જે શેષ વધે છે તે ભાજક કરતાં ઓછામાં ઓછો એક ઓછા જેટલો હોયછે, ને આગલા ઉમેરવાના અંકની કિંમત તેની પહેલાના સ્થાનના એક જેટલી હોતી નથી. તેથી શેષને દશે ગુણી આગલો અંક ઉમેરવાથી પણ દશે ભાગ ચાલી શકતો નથી, પણ આણપાણના ભાગાકારમાં તો ભાજ્યની સંખ્યા માંડવામાં દરેક અંકસ્થાનમાં આખા અંક લખાયછે ને પાણો લખાતી નથી, તેથી કોઇવાર આગલા અંકમાંથી શેષના સ્થાનમાં પાણો આવી શકતી હોય, ને તે પાણો હોવાથી વધારે ભાગાકાર નીકળતો હોય તો ભાજ્યમાં પાણો નહીં મૂકવાના કારણથી આગલો ભાગ દશે કે તેથી વધારે અંકે કહાડવો પડશે. દાખલો લીધાથી આ કારણ જલદી સમજાશે, જેમકે.

```
૧૨॥|૭૩૬॥ ( ૫
    |૬૧૧      ૧૦
    ------    ----
     ૧૧॥॥     ૬૦
     ૧૦
    ------
    ૧૧૭॥
      ૬॥
    ------
    ૧૨૪
     ૧૨૨॥
    ------
       ૧॥
```

આમાં બીજાને ભાગ દશે કહાડવો પડયો, કેમકે પાંચે ભાગ કહાડયો ત્યારે ૭૩ માંથી ૬૧॥ જતાં ૧૧॥॥ વધ્યા, પણ ૭૩ને બદલે ૭૩॥ હોત તો ૬ એજ ભાગ જાત, અને ૭ એકમમાં અરધો દશક રહેલોછે એટલે ખરેખરી એ સંખ્યા ૭૩॥ દશક અને ૧॥ એકમછે, તેથી ૭ એ ભાગ જવોજ જોઇએ. પરંતુ આણુપાણુના ભાગાકારમાં પણ ભાજ્યની વચમાં પાણો મૂકવાનો આપણામાં રીવાજ નથી.તેથી જે ભાગ છએ જવો જોઈતો હતો તે પાંચે કહાડયાથી એકમ સ્થાને દશે ભાગ કહાડવો પડયો છે.

વ્યવહારી અપૂર્ણાંક.

ભાગાનુંબંધપૂર્ણાંક ને વિષમ અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવાની રીતનું કારણ–પૂર્ણાંકને અપૂર્ણાંકના છેદે ગુણી અંશ ઉમેરવા, ને તેને અંશસ્થાને લખી તે અપૂર્ણાંકના છેદને છેદ સ્થળે લખવા. જેમકે $૩\frac{૩}{૪}=\frac{૩\times૪+૩}{૪}=\frac{૧૫}{૪}$ કેમકે $૩\frac{૩}{૪}$ એટલે ત્રણ આખાને ત્રણ પાવલાં મળીને એ અપૂર્ણાંક થયેલો છે. હવે ત્રણ આખાના પાવલાં કરીએ તો બાર થાય, ને ત્રણ પાવલાં હતાં તે સાથે કુલ ૧૫ પાવલાં અથવા $\frac{૧૫}{૪}$ થયા.

વિષમ અપૂર્ણાંકને ભાગાનુંબંધપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવું હોય તો અંશને છેદે ભાગી ભાગાકાર આવે તે પૂર્ણાંક ને શેષ વધે તે અંશમાં લખી છેદને છેદમાં લખવા-જેમકે $\frac{૧૫}{૪}$ અથવા ૧૫ ચોથા ભાગછે તેમાંથી ૩ આખાને ૩ ચોથા ભાગ નીકળ્યા એટલે $૩\frac{૩}{૪}$ જવાબ. આનું કારણ ઉપર આવી ગયું છે.*

કોઇ અપૂર્ણાંકને પૂર્ણાંકે ગુણવાની રીત ને કારણ–અપૂર્ણાંકના અંશને પૂર્ણાંકે ગુણી અંશસ્થાને લખી જે છેદ હોય તે છેદ સ્થાને લખવો, અથવા-જો છેદને પૂર્ણાંકે ભગાતા હોય

તો ભાગી જે ભાગાકાર આવે તેને છેદમાં ને અપૂર્ણાંકના અંશને અંશસ્થળે લખવા એ જવાબ. જેમકે $\frac{૩}{૮}$ ને બેએ ગુણવા હોય તો $\frac{૩}{૮}\times૨=\frac{૩\times૨}{૮}=\frac{૬}{૮}$ અથવા $\frac{૩}{૮\div૨}=\frac{૩}{૪}$ એ જવાબ. કારણ કે $\frac{૩}{૮}$ એ કોઇ વસ્તુના આઠ ભાગ કરીએ તેમાંથી ત્રણ ભાગ લઈએ તેની બરાબર છે અને એવા છ ભાગ લઈએ તો ત્રણ ભાગ કરતાં તે બમણા થાય એ દેખીતું છે. અથવા કોઇ વસ્તુના ચાર ભાગ કરી તેમાંના ત્રણ ભાગ લઇએ તે, તેજ વસ્તુના આઠ ભાગ કરી તેમાંના ત્રણ ભાગ લઇએ તે કરતાં બમણાજ થશે કેમકે લીધેલા ભાગની સંખ્યા સરખીછે, પણ બીજીવારના ભાગમાંના દરેક કરતાં પહેલી વારમાંનો દરેક ભાગ બમણો મોટોછે.

કોઇ અપૂર્ણાંકને પૂર્ણાંકે ભાગવાની રીત ને કારણ-અપૂર્ણાંકના અંશને પૂર્ણાંકે ભગાતા હોય તો ભાગી અંશમાં ને આપેલા છેદને છેદમાં લખવો અથવા અપૂર્ણાંકના છેદને પૂર્ણાંકે ગુણી તેને છેદમાં અને આપેલા અંશને અંશમાં લખવો એ જવાબ. જેમકે $\frac{૬}{૮}$ ને બે એ ભાગવા હોય તો $\frac{૬\div૨}{૮}=\frac{૩}{૮}$ અથવા $\frac{૬}{૮\times૨}=\frac{૬}{૧૬}$ કારણ કે $\frac{૬}{૮}$ એટલે એક વસ્તુના આઠ સરખા ભાગમાંના છ ભાગ છે તેના બે ભાગ કરવા હોય તો દરેક ભાગ ત્રણ આઠમા ભાગનો આવશે. એટલે $\frac{૩}{૮}$ આવશે અથવા તે વસ્તુના આઠ ભાગછે, તે દરેક ભાગના બબે ભાગ એટલે કૂલ ૧૬ ભાગ કર્યા તો એમાંનો દરેક ભાગ તે આઠ ભાગમાંના દરેક ભાગ કરતાં અરધો થશે. માટે આઠ ભાગમાંના છ ભાગ કરતાં સોળ ભાગમાંના છ ભાગ અરધા થશે.

" **કોઈ અપૂર્ણાંકના અંશને અને છેદને કોઇ રકમે ગુણીએ અથવા ભાગીએ તો તેની કીમતમાં ફેર પડશે નહીં તેનું કારણ**–ઉપરના કારણ પ્રમાણે કોઇ અપૂર્ણાંકના અંશને કોઇ સંખ્યાએ ગુણીએ તો તેટલા ગણી તે અપૂર્ણાંકની કિંમત વધે

છે, અને તેજ અપૂર્ણાંકના છેદને જો તેજ સંખ્યાએ ગુણી- એ તો તે અપૂર્ણાંકની તેટલા ગણી કિંમત ઘટે છે. એ- ટલે અંશને કોઇ રકમે ગુણવાથી જેટલા ગણી કિંમત વધે તેટલાજ ગણી કિંમત છેદને તેજ રકમે ગુણવાથી ઘટે; તેથી કિંમતમાં ફેર પડતો નથી. તેમજ કોઇ અપૂર્ણાંકના અં- શને કોઇ રકમે ભાગીએ તો તેટલા ગણી કિંમત ઘટે છે. અને તે અપૂર્ણાંકના છેદને તેજ રકમે ભાગીએ તો તેટલા ગણી કિંમત વધે છે, એટલે અંશને કોઇ રકમે ભાગવાથી જેટલા ગણી કિંમત ઘટે, તેટલાજ ગણી કિંમત છેદને તે રકમે ભાગવા- થી વધે છે, તેથી તે અપૂર્ણાંકની કિંમતમાં ફેર પડતો નથી.

ઉપરનાજ કારણને લીધે અપૂર્ણાંકોનો અતિસંક્ષેપ કરવાથી પણ કિંમતમાં ફેર પડતો નથી કેમકે અતિસં- ક્ષેપમાં અંશ અને છેદ બંનેને એકજ રકમે ભાગવી પડેછે.

પ્રભાગજાતિ અપૂર્ણાંકમાં જેટલા અપૂર્ણાંક હોય, તે- મના અંશોનો ગુણાકાર અંશ સ્થળે અને છેદોનો ગુણાકાર છેદ સ્થળે લખવો. જેમકે $\frac{૨}{૩}$ના $\frac{૩}{૪}=\frac{૨\times૩}{૩\times૪}=\frac{૬}{૧૨}$ કારણ કે ઉપર કહ્યા પ્રમાણે $\frac{૨}{૩}$નો $\frac{૧}{૪}$ અથવા ચોથો ભાગ $\frac{૨}{૧૨}$ થાય, એવા ૩ ભાગ અથવા ૩ ગણા લઇએ તો $\frac{૬}{૧૨}$ આવે.

મિશ્ર અપૂર્ણાંકમાં અંશ સ્થળના અપૂર્ણાંકના અંશ, ને છેદ સ્થળના અપૂર્ણાંકના છેદનો ગુણાકાર અંશમાં, ને અંશસ્થળના અપૂર્ણાંકના છેદ ને છેદ સ્થળના અપૂર્ણાંકના અંશ એ બેનો ગુણાકાર છેદમાં લખવાથી સાદું અપૂર્ણાંક આવે છે. જેમકે $\frac{\frac{૨}{૩}}{\frac{૩}{૪}}=\frac{૨\times૪}{૩\times૩}=\frac{૮}{૯}$ જવાબ

કારણ કે—ઉપર કહ્યા પ્રમાણે અંશ અને છેદ બંનેને ચારે ગુણ્યા તો $\frac{\frac{૨}{૩}}{\frac{૩}{૪}}=\frac{૨}{૩}$ અંશને $\times૪=\frac{૨\times૪}{૩}$ અને $\frac{૩}{૪}$ છેદને

×૪=$\frac{૩\times૪}{૪}$=૩ એટલે $\frac{\frac{૨\times૪}{૩}}{૩}$ હવે ફરીને $\frac{૨\times૪}{૩}$ એ અંશને, અને ૩ છેદને ત્રણે ભાગ્યા તો $\frac{૨\times૪}{૩}\div૩=\frac{૨\times૪}{૩\times૩}$ અથવા $\frac{૮}{૯}$ આવ્યા ને ૩ છેદને ત્રણે ભાગ્યા તો ૧ આવ્યો. પણ છેદમાં ૧ મૂકવાથી કે નહિ મૂકવાથી કિંમતમાં ફેર પડતો નથી. માટે $\frac{૮}{૯}$ એ જવાબ.

અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ કરવાની રીત ને કારણ.

કેટલાક અપૂર્ણાંકોનો લઘુતમ સમછેદ કરવો હોય તો, તેમના છેદનો લઘુતમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો. એ બધા અપૂર્ણાંકોનો સમછેદ થશે, એ સમછેદને દરેક અપૂર્ણાંકના છેદે ભાગી, અંશે ગુણી તે ગુણાકાર દરેકના અંશ સ્થળે લખવા એ જવાબ. જેમકે $\frac{૫}{૭}$, $\frac{૭}{૨૮}$, $\frac{૩}{૧૪}$ એનો લઘુતમ સાધારણ ભાજ્ય ૨૮ છે. તેને દરેક અપૂર્ણાંકના છેદમાં લખ્યો એ છેદને સાતે ભાગી ૫ એ ગુણ્યા તો ૨૦, ૨૮ એ ભાગીને સાતે ગુણ્યા તો સાત, ને ચૌદે ભાગી ત્રણે ગુણ્યા તો ૬ આવ્યા. એટલે $\frac{૨૦}{૨૮}$, $\frac{૭}{૨૮}$, $\frac{૬}{૨૮}$ એ સમચ્છેદ થયો. એની કિંમતમાં અને મૂળ અપૂર્ણાંકોની કિંમતમાં ફેર પડતો નથી. કેમકે મૂળ અપૂર્ણાંકના અંશ કરતાં સમછેદનો અંશ જેટલા ગણો વધે છે, તેટલાજ ગણો છેદ પણ વધે છે ને છેદને અને અંશને કોઇ એકજ રકમે ગુણવાથી કિંમતમાં ફેર પડતો નથી, એ ઉપર આવી ગયું છે.

અપૂર્ણાંકોનો સર્વાળો કે બાદબાકી કરવાની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકોનો સર્વાળો કે બાદબાકી કરવી હોય ત્યારે તે અપૂર્ણાંકોનો સમછેદ કરીને અંશોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરીએ છીએ, ને સમછેદની સંખ્યા છેદમાં લખીએ છીએ. પણ છેદનો સરવાળો કે બાદબાકી કરતા નથી, કેમકે સરવાળો કે બાદબાકી સજાતિય પદની સરખા મહત્વની ર-

કમોની થાય. ૩. ૪-૨ આના એ નાણાની સજાતિય રકમો છે, પરતુ સરખા મહત્વની નથી. તેથી એનો સરવાળો ૬ રૂપિઆ કે ૭ આના થતો નથી, તેમજ $\frac{3}{16}$, અને $\frac{5}{8}$ રૂપિઆનો સરવાળો $\frac{3}{16}+\frac{10}{16}=\frac{13}{16}$ થાય પણ $\frac{8}{16}$ કે $\frac{8}{8}$ ન થાય. $\frac{3}{16}$ એટલે એક રૂપિઆના સોળ ભાગમાંના ત્રણભાગ અથવા ત્રણ આનામાં $\frac{5}{8}$ એટલે એક રૂપિઆના આઠ ભાગમાંના પાંચ ભાગ અગર પાંચ બેઆનીઓ ઉમેરવી હોય તો ૮ બેઆની કે ૮ આના ન થાય, માટે ૧ રૂપિઆના આઠમા ભાગ, અથવા બે આની છે, તેના સોળમા ભાગ અથવા આના કરવાને સમચ્છેદ કર્યો તો પાંચ બે આનીના દશ આના થયા. તેમાં ત્રણ આના ઉમેર્યા, તો તેરઆના અથવા એક રૂપિઆના ૧૩ સોળમા ભાગ=$\frac{13}{16}$ થયા. બાદબાકીનું પણ એજ કારણ છે, ને અપૂર્ણાંકોના સર્વાળામાં છેદનો સર્વાળો કરતા નથી, કેમકે છેદતો માત્ર આખી કિંમતના કેટલા ભાગ કરેલા છે, તેજ બતાવે છે, પણ તે અપૂર્ણાંકની કિંમત તો તે ભાગમાંના કેટલા ભાગ લીધા છે, તે ઉપર એટલે અંશ ઉપર આધાર રાખે છે, તેથી અંશોનોજ સર્વાળો થાય છે, જેમકે ઉપલાજ દાખલામાં $\frac{13}{16}$ અથવા ૩ સોળમા ભાગને દશ સોળમા ભાગ અથવા $\frac{10}{16}$ નો સર્વાળો. તેર સોળમા ભાગ અથવા $\frac{13}{16}$ થાય પણ $\frac{13}{32}$ કે ૧૩ બત્રીશમા ભાગ નહિ થાય.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકના ગુણાકારની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર કરવો હોય તો અંશે અંશનો અને છેદે છેદનો ગુણાકાર કરવો, કેમકે અપૂર્ણાંકને અપૂર્ણાંકે ગુણવા, એટલે એક અપૂર્ણાંકનો બીજા અપૂર્ણાંક જેટલો ભાગ લેવો એવો અર્થછે. પ્રભાગ જાતિ અપૂર્ણાંકમાં પણ એજ પ્રમાણે હોયછે. એટલે પ્રભાગ જાતિ અપૂર્ણાંકમાં, અને અપૂર્ણાંકના ગુણાકારમાં ફેર નથી, તેથી પ્રભાગ

જાતિ અપૂર્ણાંકને સાદા અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવાની જે રીત અને કારણ કહ્યું, તેજ રીત અને કારણ અપૂર્ણાંકના ગુણાકારમાં પણછે, જેમકે $\frac{૨}{૩}$ના$\frac{૩}{૪}$ એ પ્રભાગ જાતિ અપૂર્ણાંકને $\frac{૨}{૩}\times\frac{૩}{૪}$ એ સરખાંજ છે, બંનેમાં $\frac{૬}{૧૨}$ જવાબ આવશે, પણ બંનેમાં સંક્ષેપ ઉડાડવો જોઇએ, એટલે ગુણાકારનું ટુંકું રૂપ કરવું જોઇએ: તેથી $\frac{૬}{૧૨}$ નું ટુંકું રૂપ કે સંક્ષેપ $\frac{૧}{૨}$ આવશે. કેમકે $\frac{૬}{૧૨}$ ને $\frac{૧}{૨}$ ની કિંમતમાં ફેર છે નહિ, કારણ કે અંશને છેદ બંનેને ૬ એ ભાગેલા છે.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકના ભાગાકારની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકનો ભાગાકાર કરવો હોય તો જે અપૂર્ણાંક ભાજક હોય, તેના અંશે ભાજ્ય અપૂર્ણાંકના છેદને, અને છેદે અંશને ગુણવા. અથવા ભાજક અપૂર્ણાંકના અંશને છેદ સ્થળે, ને છેદને અંશસ્થળે લખીને તેનો ભાજ્ય અપૂર્ણાંક સાથે ગુણાકારની રીતે ગુણાકાર કરવો. જેમકે $\frac{૧}{૨}\div\frac{૩}{૪}=\frac{૧}{૨}\times\frac{૪}{૩}=\frac{૪}{૬}=\frac{૨}{૩}$ આ જવાબ. કારણ કે પાછળ આવી ગયું કે ભાજક જે પ્રમાણે ઘટે, તે પ્રમાણે ભાગાકાર વધારે આવે, ને ભાજક વધે તેમ ભાગાકાર ઘટે, હવે $\frac{૧}{૨}$ ને $\frac{૧}{૪}$એ ભાગવા એટલે $\frac{૧}{૨}$ ના ૪ ગણા કરવા. કેમકે ભાજક ૧ હોય તો ભાગાકાર $\frac{૧}{૨}$ આવે, પણ ભાજક ૪ ગણો ઓછો છે, માટે ભાગાકાર ૪ ગણો વધારે આવવો જોઇએ. એટલે $\frac{૧}{૨}\div\frac{૧}{૪}=\frac{૧}{૨}\times૪=\frac{૪}{૨}$ આવે. હવે ભાજક $\frac{૧}{૪}$ ને બદલે ત્રમણો, અથવા $\frac{૩}{૪}$ લઇએ, તો ભાગાકાર $\frac{૪}{૨}$ થી ત્રણ ગણો ઓછો આવવો જોઈએ, એટલે $\frac{૪}{૨}\div૩=\frac{૪}{૬}$ અથવા $\frac{૨}{૩}$ આવે. આથી સમજાશે કે $\frac{૧}{૨}\div\frac{૩}{૪}=\frac{૧}{૨}\times\frac{૪}{૩}=\frac{૪}{૬}=\frac{૨}{૩}$ શાથી આવ્યા. ભાજકને ઉલટાવીને ગુણવાની રીત આ ઉપરથી નીકળીછે.

દશાંશ અપૂર્ણાંક.

દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં તે અપૂર્ણાંક ઉપર જમણી તરફ

૨૬ શૂન્ય વધારવાથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી, પ-

ણ તે અપૂર્ણાંકના અંકોની ડાબી તરફ શૂન્ય મૂકવાથી દશગણી કીમત ઘટેછે તેનું કારણ— જમણી તરફ શૂન્ય વધારવાથી જેમ દશ ગણો અંશ વધેછે તેમ છેદ પણ દશ ગણો વધેછે, એટલે સંક્ષેપ કરવાથી તે અપૂર્ણાંકનું મૂળ રૂપ આવી રહેછે, પણ ડાબી તરફ શૂન્ય વધારવાથી માત્ર છેદજ દશ ગણો વધેછે તેથી તેની મૂળ કીમત કરતાં દશ ગણી કીમત ઘટેછે. જેમકે. ૧ આની કીમત વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં ૧/૧૦ છે હવે ·૧ ઉપર જમણી તરફ શૂન્ય વધાર્યાથી ·૧૦ થયા અને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં મૂકીએ તો ૧૦/૧૦૦ આવે તેનો સંક્ષેપ કર્યાથી ૧/૧૦ અથવા ·૧ આવી રહે છે. પણ ·૧ ની પાછળ મીંડું મૂક્યાથી ·૦૧ આવશે તેને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં મૂકીએ તો ૦૧/૧૦૦ અથવા ૧/૧૦૦ આવ્યા એટલે મૂળ છેદ કરતાં છેદ દશ ગણો થયો ને અંશ એને એ રહ્યાથી કીમત દશ ગણી ઘટી.

દશાંશ સર્વાવાળાની રીત ને કારણ—દશાંશ સરવાળામાં બધી સંખ્યા, દશાંશ ચિન્હ એક ઉભી સીધી લીટીમાં આવે તે રીતે મૂકી જમણા હાથ ભણીના ઉભી સીધી હારના અંકોનો સરવાળો કરી તેમાંની વદી તેની પાસેના ડાબા હાથ ભણીના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરીએ છીએ. અને એજ રીતે બધા અંકોનો સરવાળો કરીએ છીએ, કેમકે દશાંસ માંડવામાં દશાંશ ચીન્હ તે સંખ્યામાં દશાંશ અપૂર્ણાંકના અંકોની હદ બતાવેછે. એ ચિન્હ પછીનો નજીકનો જમણા હાથ ભણીનો અંક દશાંશનો, તેની પાસેનો જમણા હાથ ભણીનો શતાંશનો, તેની પાસેનો સહસ્રાંશનો ને તેની પાસેનો દશ સહસ્રાંશનોછે. એ અંકો એક બીજા નીચે સજાતિય આવે માટે દશાંશ ચિન્હ ઉભી સીધી લીટીમાં આવે એ રીતે બધી સંખ્યા માંડીએ છીએ. દશાંશ સંખ્યાના અપૂર્ણાંકના અંકોની કીમત પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાની

પેઠે જમણા હાંથ ભણીના અંક કરતાં તેની પાસેના ડાબા હાથ ભણીના અંકની કીમત દશ ગણી વધારેછે. માટે જમણા હાથ ભણીના અંકોનો સરવાળો કરી તેમાંની વદી તેની પાસેના ડાબા હાથ ભણીના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરીએ છીએ. છેવટે દશાંશ અંકોના સરવાળામાંથી જે વદી આવે તે પૂર્ણાંક થાય માટે તેને પૂર્ણાંક એકમના સરવાળામાં ઉમેરવામાં આવેછે. ·૯ ને ·૪ દશાંશનો સરવાળો $\frac{૯}{૧૦}+\frac{૪}{૧૦}=\frac{૧૩}{૧૦}$ આવે એટલે ૧ પૂર્ણાંકને ·૩ થાય. સરવાળામાં ચિન્હ દશાંશ અંકોના સરવાળાની ને પૂર્ણાંક અંકોના સરવાળાની વચમાં આવે એ દેખીતુંછે.

બાદબાકી પણ જમણા હાથ ભણીથી પૂર્ણાંક સંખ્યાની બાદબાકીની રીતેજ કરવી. ને ચિન્હ સરવાળાની પેઠેજ મૂકવું. એનું કારણ ઉપર આવી ગયું છે.

દશાંશ ગુણાકારની રીત ને કારણ—દશાંશ ગુણાકાર સાદા ગુણાકારની પેઠે કરી ગુણ્યને ગુણકના દશાંશના જેટલા આંકડા હોય તેટલા આંકડા ગુણાકારમાં કાપી ચિન્હ કરવાથી આવેછે. અને ગુણ્યને ગુણકના દશાંશ આંકડા જેટલા ગુણાકારમાં નહોય તો ખૂટે તેટલાં મીડાં તે ગુણાકારની પાછળ મૂકવાથી આવેછે. આનું કારણ દાખલાથી જલદી સમજાશે.

.૧×.૧=$\frac{૧}{૧૦}\times\frac{૧}{૧૦}=\frac{૧}{૧૦૦}$ થાય છે. એને દશાંશનું રૂપ આપીએ તો ·૦૧ આવે. તેમજ ૧·૧×૧·૧=$\frac{૧૧}{૧૦}\times\frac{૧૧}{૧૦}=\frac{૧૨૧}{૧૦૦}$ અથવા ૧$\frac{૨૧}{૧૦૦}$ આવે એને દશાંશમાં મૂકીએ તો ૧·૨૧ થાય તે ૧·૧×૧·૧નો ગુણાકાર ૧·૨૧ આવે, કેમકે ૧૨૧ ગુણાકારમાંથી ગુણ્યને ગુણક બંનેના મળીને દશાંશ બે આંકડા છે તે કાપવામાં આવે. આ ઉપરથી રીત કેમ નીકળી તે સમજાશે.

દશાંશ ભાગાકારની રીત ને કારણ—દશાંશ ભાગાકારમાં સાદા ભાગાકારની પેઠે ભાગાકાર કરીને ભાજ્યમાં

દશાંશના જેટલા આંકડા હોય તેમાંથી ભાજકના આંકડા બાદ કરી બાકી રહે તેટલા આંકડા કાપી ભાગાકારમાં ચિન્હ મૂકવું. પણ બાદબાકી કરતાં ભાગાકારમાં આંકડા ઓછા હોય તો જેટલા આંકડા ઓછા હોય તેટલાં ભાગાકારના અંકોની પાછળ મીંડાં મૂકીને તેની પહેલાં ચિન્હ કરવું. પણ જો ભાજ્યના દશાંશ અંક કરતાં ભાજકના દશાંશ અંક વધારે હોયતો તેટલાં મીંડાં ભાગાકારના અંક ઉપર જમણી તરફ વધારવાં. એ મીંડા સુધાંત આખી સંખ્યા પૂર્ણાંક આવશે. કારણ–

ભાગાકારને ભાજકનો ગુણાકાર તે ભાજ્ય થાય માટે ભાજક ને ભાગાકારનાં દશાંશ સ્થળોના સરવાળા જેટલાં ભાજ્યમાંનાં દશાંશ સ્થળ હોય, તેથી ભાજ્યનાં દશાંશ સ્થળમાંથી ભાજકનાં દશાંશ સ્થળ બાદ કર્યાં તો બાકી રહ્યાં તેટલાં દશાંશ સ્થળ ભાગાકારમાં આવવાં જોઇએ, અને તેજ કારણથી ભાગાકારમાં તેટલા આંકડા ન હોય તો ભાગાકારના આંકડાની પહેલાં ખૂટતાં મીંડાં મૂકી દશાંશ આંકડા પૂરા કરવામાં આવે છે. કેમકે દશાંશમાં પહેલાં મીંડાં મૂકવાથી દશાંશ સ્થળ વધે છે ને છેલ્લાં મૂકવાથી વધતાં નથી કારણકે દશાંશમાં છેલ્લા મીંડાં વધાર્યાથી કીમતમાં ફેરફાર થતો નથી. પણ જો ભાજ્ય કરતાં ભાજકનાં દશાંશ સ્થળ વધારે હોય તો ભાગાકારના અંક ઉપર તેટલાં મીંડાં મૂકી તેને પૂર્ણાંક ગણવામાં આવે છે. કેમકે તે પ્રમાણે કરવાથી ભાગાકારને ભાજકનો ગુણાકાર ભાજ્યની બરાબર આવી રહેછે. અથવા ભાજકનાં વધારાનાં દશાંશ સ્થળ જેટલાં ભાજ્યનાં દશાંશ સ્થળમાં મીંડાં ચઢાવી ભાગ ચલાવ્યાથી પણ ભાગાકારમાં તેટલા પૂર્ણાંક આંકડા વધારે આવેછે. વળી જેમ ભાજક નાનો હોય તેમ ભાગાકાર મોટો આવવોજ જોઈએ, નહિતો ભાજકને ભાગાકારનો ગુણાકાર ભાજ્યની બરાબર થાય નહિ.

કોઈ વ્યવહારી અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપવું હોય

તેા તે અપૂર્ણાંકના અંશને છેદે દશાંશ ભાગાકારની રીતે ભાગવા પડેછે, કેમકે વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં છેદ એ અંશનેા ભાજક છે.

પૂનરાવર્ત્ત દશાંશ.

અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં અંતવાન દશાંશ આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ—કેાઇ અપૂર્ણાંકનેા અતિ સંક્ષેપ કર્યા પછી જો છેદમાં બે, પાંચ કે તેમનેા કેાઈ ગુણાકાર કે તેમનેા કેાઈ ઘાત કે ઘાતેાનેા ગુણાકાર હેાય તેા તેને દશાંશનું રૂપ આપતાં અંતવાન આવશે, કેમકે દશાંશ રીતે અંશને છેદે ભાગતાં ભાજ્યમાં મીંડાં લેઇ શેષ ઉપર ચઢાવીએ છીએ, એટલે છેદના દશગણા, સેા ગણા ઇત્યાદિ કરીએ છીએ. અને કેાઈપણ રકમના દશગણા, સેા ગણા ઈત્યાદિ કરવાથી બે, પાંચ, તેમનેા કેાઈ ગુણાકાર કે તેમનેા કેાઇ ઘાત કે ઘાતેાનેા ગુણાકાર નિઃશેષ ભાગી શકે છે, તેથી તે દશાંશ અંતવાન આવેછે,

અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં શુદ્ધ પુનરાવર્ત્ત દશાંશ આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ—કેાઈ અપૂર્ણાંકનેા અતિસંક્ષેપ કર્યા પછી જો તેના છેદમાં ૩, ૭, ૧૧, ૧૩, ૧૭ ઈત્યાદિ બેને પાંચ સિવાયની કેાઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા હેાય કે કેાઈ અવિભાજ્ય સંખ્યાનેા ઘાત કે, બે કે વધારે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનેા ગુણાકાર હેાય તેા તેને દશાંશનું રૂપ આપતાં શુદ્ધ પૂનરાવર્ત્ત દશાંશ આવશે. કેમકે વ્યવહારી અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં શેષ ઉપર ચઢાવવાનેા અંક મીંડુંજ હેાયછે. મીંડું ચઢાવ્યાથી તે અંક દશ ગણેા થાયછે. પણ દશને કે દશના અમુક ગણાને અવિભાજ્ય સંખ્યા નિઃશેષ ભાગી શકતી નથી; અને શેષ ભાજક કરતાં ઓછેા આવવેા જોઇએ તથા એકવાર વધેલેા અંક ફરીને વધવેા ન જોઈએ; એટલે ભાજ્યના મૂળ અંક જેટલેા

શેષ વધે તે પછીના અંક, પહેલાં આવી ગયેલાજ આવવાના. કેમકે શેષ ઉપર પેહેલાં ચઢાવેલાજ અંક (મીંડું) ચઢાવવાના હોયછે અને તેથી ભાગાકારમાં પૂનરાવર્ત્ત અંકની સંખ્યા પણ હમેશાં ભાજકના આંકડા કરતાં ઓછીજ હોવાની, કેમકે શેષમાં ભાજક કરતાં અંક ઓછો વધવાનો ને એકવાર વધેલો અંક ફરી વધવાનો નહિ તેથી વધારેમાં વધારે ભાજક કરતાં એક ઓછો એટલા અંકમાંથી દરેક અંક શેષમાં એકવાર આવવાનો એટલે ભાગાકારપણ ભાજકના અંક કરતાં એક ઓછો એટલીવાર જવાનો. જેમકે છેદમાં સાત હોયતો શેષમાં વધારેમાં વધારે છ સુધીના દરેક અંક એકવાર આવવાના, તેથી ભાગાકારમાં વધારેમાં વધારે છ આંકડા આવવાના.

મિશ્ર પુનરાવર્ત્ત ક્યારે આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ —કોઇ અપૂર્ણાંકના છેદમાં બે અથવા પાંચ કે તમનો ગુણાકાર, કોઇ ઘાત કે ઘાતોના ગુણાકારનો ને કોઇ અવિભાજ્ય સંખ્યાનો ગુણાકાર હોય, એટલે ઉપર કહેલા અંતવાન દશાંશ આવે એવા ને શુદ્ધ પૂનરાવર્ત્ત દશાંશ આવે એવા અંકોનો ગુણાકાર હોય તો તે અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં મિશ્ર પૂનરાવર્ત્ત આવશે કેમકે શેષને હમેશાં દશ ગણા કરી ભાગાકાર કરવામાં આવેછે, ને એવી રકમને ઉપલા મિશ્ર ભાજકે ભાગવાથી મિશ્રપુનરાવર્ત્ત અંકોજ આવવા જોઈએ. કેમકે ભાજકના અવયવ પાડીએતો બે, પાંચ અને બીજી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ આવશે, હવે બેએ કે પાંચે ભાગવાથી નિઃશેષ ભાગાકાર આવશે, ને એ ભાગાકારને અવિભાજ્ય સંખ્યાએ ભાગવાથી પહેલા અંક અંતવાન આવ્યા પછીજ પુનરાવર્ત્ત અંકો આવવાના. જેમકે ⅙ને દશાંશનું રૂપ આપતાં ૬ ના અવયવ ૨ ને ૩ પાડ્યા. ૧ને બેએ ભાગતાં. ૫ આવ્યા પણ તેને ત્રણે ભાગતાં મીંડું ચઢાવ્યા વગરજ એક અંક આવ્યો માટે તે અંતવાન થવાનો ને મીંડું

ચઢાવ્યા પછીના આંકડા પુનરાવર્ત્ત આવવાના, કેમકે અ-વિભાજ્ય સંખ્યા ભાજકમાં હોય તો જ્યારે ભાજ્ય ભાજક કરતાં નાનો હોય ને તેને મીડું ચડાવી દશગણો કરીએ ત્યારેજ પુનરાવર્ત દશાંશ આવેછે.

શુદ્ધ પુનરાવર્ત્ત દશાંશને વ્યવાહારી અપૂર્ણાંકમાં લાવવાની રીત ને કારણ—પુનરાવર્ત્ત અંકને અંશમાં લખીને અંકોની સંખ્યા જેટલા નવડા છેદમાં લખી અતિ સંક્ષેપ જતો હોય તો કાહાડવો. કેમકે $\frac{૧}{૯}$ ને દશાંશનું રૂપ આપતાં એક પુનરાવર્ત્ત, $\frac{૨}{૯}$ ના ·૨̇, $\frac{૩}{૯}$ અથવા $\frac{૧}{૩}$ ના. ·૩̇ ઇત્યાદિ આવે છે, માટે પુનરાવર્ત્ત એક અંક હોય તો તેની નીચે નવડો મૂકી અતિ સંક્ષેપ કર્યાથી વ્યવહારી અપૂર્ણાંક થશે. પણ જો અંશમાં બે આંકડા હોય તો બે નવડાએ ભાગ્યાથી તેજ બે અંક પુનરાવર્ત્ત આવેછે. જેમકે. $\frac{૨૫}{૯૯}$ ને દશાંશનું રૂપ આપતાં ·૨̇૫̇ આવશે માટે ·૨̇૫̇ ને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપતાં ૨૫ ના છેદમાં બે નવડા આવવા જોઈએ. એજ પ્રમાણે અંશમાં જેટલા અંક હોય તેટલા નવડા છેદમાં મૂક્યાથી તે પુનરાવર્ત્ત દશાંશ આવી રહેછે.

મિશ્ર પુનરાવર્ત્ત દશાંશને વ્યવહુવારી અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવાની રીત ને કારણ—તે અપૂર્ણાંકને જૂદા રાખી, અપૂર્ણાંકને આખી સંખ્યા ગણી તેમાંથી જેટલા અંતવાન આંકડા હોય તેટલા બાદ કરવા, બાકી રહે તે અંશમાં લખી છેદમાં જેટલા પુનરાવર્ત આંકડા હોય તેટલા નવડા ને અંતવાન આંકડા જેટલાં તે નવડા ઉપર મીડાં ચઢાવવાં પછી તેને પૂર્ણાંક સાથે મૂકવા એ આખું ભાગાનું બંધ અપૂર્ણાંક થશે, અથવા પૂર્ણાંક સાથે આખી સંખ્યા ગણી તેમાંથી પુનરાવર્ત્ત સિવાયના અંક બાદ કરી બાકી રહે તે અંશમાં લખવા. ને છેદમાં પુનરાવર્ત્ત આંકડા જેટલા નવડા ને અંતવાન આંકડા જેટલાં મીડાં તે નવડા ઉપર ચ-

ડાવવાં. જેમકે $૧\cdot૪\dot{૩}-૧૪=\frac{૧૨૯}{૯૦}=૧\frac{૩૯}{૯૦}$ અથવા $૧\frac{૧૩}{૩૦}$ આવશે. કારણ કે મિશ્ર પુનરાવર્ત્ત દશાંશ એ અંતવાન અને પુનરાવર્ત્તનો સરવાળો છે. અંતવાન દશાંશના છેદમાં દશ અને પુનરાવર્ત્તના છેદમાં ઉપર કહ્યા પ્રમાણે નવ છે. એ બેનો સરવાળો વ્યવહારીમાં કરવાને સમચ્છેદ કરવો જોઇએ એટલે અંતવાન દશાંશને નવે અને પુનરાવર્ત્તને દશે ગુણવા પડશે, પછી સરવાળો કરીશું, તો આખી રકમમાંથી અંતવાન બાદ કર્યા જેટલા આવશે કેમકે અંતવાનને ૧૦−૧=૯ ગુણ્યા છે. જેમકે $\cdot૪\dot{૩}=\frac{૪}{૧૦}+\frac{૩}{૯૦}=\frac{૩૬+૩}{૯૦}=\frac{૩૯}{૯૦}$ અથવા $\cdot૪\dot{૩}=\frac{૪૩-૪}{૯૦}=\frac{૩૯}{૯૦}=\frac{૧૩}{૩૦}$ આવે, આ ઊપરથી ઉપરનો નિયમ નીકળ્યોછે.

પુનરાવર્ત્ત દશાંશના સરવાળા, બાદબાકી, કરવાં હોયતો તેને ઉપર મુજબ વ્યવહારી અપૂર્ણાકનું રૂપ આપી સરવાળો કે બાદબાકી કરી તેને ફરીથી દશાંશનું રૂપ આપવું. પણ અમૂક આંકડાં ખરા લાવી દશાંશમાંજ સરવાળો કે બાદબાકી કરવી હોય તો જેટલા આંકડા ખરા લાવવાના કહ્યા હોય તેટલા આંકડા પુનરાવર્ત્તના રાખી બાકીના આંકડા મૂકી દેવા ને મૂકી દીધેલા આંકડામાંથી વદી નીકળતી હોય તો તે રાખેલા આંકડામાં ઉમેરવી. તેથી માગેલા આંકડા ખરા આવશે. આ રીતનું કારણ ઉઘાડુંજ છે.

વાંકડીઆ ગુણાકારની રીત—એ ગુણાકારમાં દશાંશના અમુક આંકડા ખરા લાવવાનું કહેલું હોય માટે જેટલા આંકડા ખરા લાવવાના કહ્યા હોય તેટલા આંકડા ગુણ્યના દશાંશમાં ડાબા હાથ બણીથી ગણીને તે નીચે ગુણકનો પુર્ણાંકનો એકમ લખવો પછી તેની જમણી બાજુએ પુર્ણાક દશક, શતક ઇત્યાદિ લખવા ને પૂર્ણાંકના એકમની ડાબી બાજુએ ગુણકનો દશાંશ, તેની ડાબી બાજુએ સતાંશ, ઇત્યાદિ આંકડા લખવા. એ રીતે આંકડા ફેરવ્યા પછી ગુણકના છેલ્લા આંકડા વડે તેની ઉપરના આંકડાથી જમણા આં-

કડા સાથે ગુણી તેની વદી પાંચથી ૧૪સુધી એક, ૧૫થી ૨૪ સૂધી ૨, ૨૫થી ૩૪થી ત્રણ એ પ્રમાણે ગણી તેની ઉપરના આંકડા સાથે ગુણી તેમાં ઉમેરવી. પછી ડાબા હાથ બાણીના આંકડા સાથે સાદા ગુણાકારની રીતે ગુણાકાર કરવો. પછી તેની પાસેના ડાબા હાથ બાણીના આંકડાએ તેની ઉપરના આંકડા પાસેના જમણા આંકડા સાથે ગુણી તેની વદી ઉપરની રીતે ગણી તેની ઉપરના આંકડા સાથેના ગુણાકારમાં ઉમેરવી. બાકીનો ગુણાકાર સાદા ગુણાકાર માફક ગણવો. એ પ્રમાણે બધા આંકડાનો ગુણાકાર કરી સરવાળો કરવો ને જેટલા આંકડા રાખવાના કહ્યા હોય તેટલા રાખી દશાંશ ચિન્હ મૂકવું.

વાંકડીઆ ગુણાકારમાં આંકડા ફેરવવા પડે છે તેનું કારણ—જો બે આંકડા દશાંશમાં ખરા લાવવાના હોય તો શતાંશના અંક ખરા લાવવા જોઇએ. હવે ગુણ્યનો શતાંશ અને ગુણકનો એકમ એ બેનો ગુણાકાર શતાંશ આવે તેમાં ગુણ્યના સહસ્રાંશ સાથે એકમે ગુણતાં ઉપરની રીતે વદી આવે તે ઉમેરીએતો કસર જાય નહીં ને શતાંશ અંક ખરો આવે. નહીંતો સહસ્રાંશ, દશ સહસ્રાંશ આદી આંકડા મૂકી દઇએ તેની કસર આવે, વળી ગુણ્યનો સહસ્રાંશ ને ગુણકના દશકનો, ગુણ્યના દશ સહસ્રાંશને ગુણકના શતકનો ગુણાકાર પણ શતાંશ આવે છે. તેમજ ગુણ્યના દશાંશનો ને ગુણકના દશાંશનો, ગુણ્યના એકમને ગુણકના શતાંશનો, ઇત્યાદિ ગુણાકાર પણ શતાંશ આવે છે. માટે તે એક બીજાની નીચે મૂકવાને ઉલટાવવા પડે છે. કે ભૂલ થાય નહીં. અને કસર ન આવે. માટે જે બે અંકોનો ગુણાકાર શતાંશ આવતો હોય તેની પાસેના જમણા આંકડાના ગુણાકારની વદી ઉમેરવામાં આવે છે. અને એ ગુણાકારનો દરેક પેહેલો અંક શતાંશ આવે છે. માટે તે આંકડો કાપ્યા વગર

એક બીજાની નીચે મૂકીએ છીએ.

વાંકડીઆ ગુણાકારમાં વદી ૫થી ૧૪ સુધીની એક ઇત્યાદિ ગણીએ છીએ તેનું કારણ—ગુણ્યને ગુણકના જે અંકોનો ગુણાકાર શતાંશ આવતો હોય તે ગુણ્યના અંકની જમણી બાજુના અંક સાથે તે ગુણકના અંકના ગુણાકારની વદી ૫ થી ૧૪ સુધી એક, ૧૫ થી ૨૪ સુધી બે, એ રીતે ઉપર મુજબ ગણી ઉમેરવામાં આવે છે. અને તે એકજ અંકની વદી એ પ્રમાણે ગણાય છે. બાકીના ગુણાકારમાં સાદા ગુણાકાર માફક ગણાય છે. કેમકે તે આંકડો અને તેની પછીના આંકડા મૂકી દેવામાં આવે છે. તેથી જો કસરની રીતે એની વદી ઉમેરવામાં આવે નહીં, તો કસર જાય. હવે તે મૂકી દીધેલા અંકોની વદી ઉપર પ્રમાણે ૫ થી ૧૪ સુધીની એક ગણાય છે. કેમકે જો ગુણાકારએકથી ચાર સુધી આવે તો તેની વદી ઉમેર્યાથી ચારને બદલે દશ ગણ્યા બરાબર થાય તેથી છની કસર લીધી ગણાય. ને ચાર મૂકી દીધા કરતાં છ ઉમેરી વદી ગણ્યાથી કસર વધારે આવે, માટે ચાર મુકીએ છીએ. પણ પાંચ, છ કે તેની ઉપરાંતના ગુણાકારના આંકડા મૂકી દીધાથી કસર વધારે જાય કેમકે છ મૂકી દેવાને બદલે છના દશ ગણી તેની વદી ઉમેર્યાથી ચારની કસર લીધી. છ મૂકવા કરતાં ચાર વધારે લેવામાં કસર થોડી માટે છની કે સાત વગેરેની વદી ગણીએ છીએ. એ પ્રમાણે દશ ગુણાકાર આવે તોપણ એક વદી થાય, ને અગીઆર, બાર, તેર ને ચૌદ આવે તોપણ એક વદી આવે કેમકે દશની વદી એક ને ઉપરના ચાર સુધીની વદી ગણાય નહીં એટલે ચૌદ સુધીની એક વદી ગણાય ને ઉપર મુજબ પંદરની વદી બે ગણાય એજ પ્રમાણે ૧૫થી ૨૪ સુધીની બે, ૨૫થી ૩૪ સુધીની ત્રણ ઇત્યાદિ.

વાંકડીઆ ભાગાકારની રીત—જો ભાજકમાં ને ભા-

જ્યમાં પૂર્ણાંક હોયતો તેનો અથવા ભાજ્યમાં પૂર્ણાંક હોય અને ભાજકમાં ન હોય તો તેનો ભાગાકાર કરતાં ભાગાકારમાં પૂર્ણાંકના કેટલા આંકડા આવશે તે ધારી તે તથા જેટલા આંકડા દશાંશમાં લાવવાનું કહ્યું હોય એ બેના સરવાળા જેટલા આંકડા ભાજકમાં રાખી તે પછીનો અંક વદી લેવાને રાખી બાકીના કહાડી નાંખવા. પણ જો ખૂટે તો ઉપર મીંડાં ચઢાવી પુરા કરવા. જો ભાગાકારમાં પૂર્ણાંક આવવાના ન હોય તો ભાગાકારમાં જેટલાં દશાંશ સ્થળ લાવવાનાં હોય તેટલા આંકડા ભાજકમાં રાખવા, પણ જો ભાગાકારમાં પ્રથમ મીંડાં આવ્યા પછી અંક આવવાના હોય તો મીંડાં સિવાય જેટલા અંક આવવાના હોય તેટલા અંક ભાજકમાં રાખવા પછી ભાગ ચલાવવો. જે ભાગ આવે તેણે ભાજકના વધારાના આંકડા સાથે ગુણી તેની વદી વાંકડીઆ ગુણાકારમાં વદી ગણવાનું કહ્યું તે રીતે ગણી તેની પાસેના આંકડાના ગુણાકારમાં ઉમેરવી. પછી બાકીના અંક સાથે ગુણી એ ગુણાકાર ભાજ્યના ડાબી તરફના અંક નીચે અનુક્રમે મૂકી બાદ કરવો. બાકી રહે તે ઉપર આગલો આંકડો ચઢાવ્યા સિવાય ભાજકે ભાગ ચલાવવો. જે ભાગ આવે તેણે પહેલાં કરતાં એક ઓછા આંકડા સાથે ઉપર મુજબ ગુણી તથા વદી ઉમેરી તે ગુણાકાર ભાજ્યની બાકીમાંથી બાદ કરવો. વળી તે બાકી ઉપર, ઉપર મુજબ ભાગ ચલાવવો, ને એક એક ઓછા સાથે ગુણી બાદ કરવો. એ પ્રમાણે છેવટ સુધી કરી ભાગાકારમાં લાવવાનાં દશાંશ સ્થળ જેટલા આંકડા કાપી ચિન્હ મૂકવું, એજવાબ.

• જેમકે ૪૨૨·૮૫૯૩+૨૫·૮૭૦૬૩૮૨૫નો ભાગાકાર કરી ત્રણ દશાંશ સ્થળ લાવવા હોય તો ૪૨૨ ને ૨૫ એ પૂર્ણાંકના ભાગાકારથી જણાય છે કે બે પૂર્ણાંક આવશે ને ત્રણ દશાંશ સ્થળ લાવવાનાં છે માટે પાંચ અંક ભા-

જકમાં રાખ્યા તો ૨૫·૮૭૦ આવ્યા ને ૬ વદી માટે રાખ્યો એટલે નીચે પ્રમાણે ભાગાકાર થશે.

૨૫·૮૭૦૬૩૮૨૫)૪૨૨·૮૫૯૩(૧૬·૩૪૫
૨૫૮૭૧
ભાજકના(·)નિ-૨૫·૮૭૦)૧૬૪૧૪ આ ભાગાકારને ભાજકનો
૧૫૫૨૨
શાની વાળાઆં- ૨૫·૮૭) ૮૯૨ ગુણાકાર કરવાથી ભાજ્ય-
૭૭૬
કડા ગુણાકારની ૨૫·૮)૧૧૬ ના ઉપયોગમાં લીધેલા આં-
૧૦૩
જદી ગણુવાનાછે. ૨૫·) ૧૩ કડા મળી રહેશે.
૧૩
૦૦

વાંકડીઆ ભાગાકારની રીતનું કારણ—જેમ ગુણાકારમાં તેમ ભાગાકારમાં જેટલા જરૂરના તેટલાજ આંકડા રાખવામાં આવે છે કે જેથી વખતને મહેનતનો બચાવ થાય. તેથી ભાગાકારમાં જેટલા આંકડા આવવાના હોય તેટલાજ આંકડા ભાજકમાં રાખી સાદા ભાગાકારની માફક ભાગ ચલાવવામાં આવે છે. વધારાના આંકડા મહેનત બચવા માટે ગણુતા નથી. પહેલા ભાગનો ને ભાજકનો ગુણાકાર કરતાં ભાજ્યમાંથી બાદ કરવો. એ બાદબાકીમાં છેલ્લો અંક આવે તે જે દશાંશનો હોય તે, દશાંશ ગુણાકારની પેઠે હમેશાં આવે એવી ભાજકની રકમ લેઈ નવા ભાગનો ગુણાકાર કરવો. કેમકે શેષ ઉપર ટુંકું થવાને નવો અંક ચઢાવતા નથી. હવે ભાગાકારમાં જેમ અંક નવો કહાડીશું તેમ તેની કિંમત પહેલાંના અંક કરતાં દશ ગણી ઘટતી જશે, માટે ભાજકનો અંક દશ ગણો ભારે લેઇ ગુણવા જોઇએ અને તેથી ભાજકનો એકેક અંક કાપીને ગુણાકાર ક-

રવો પડે છે. જેમ ઉપલા દાખલામાં.

૨૫.૮૭૦૬૩૮ ૫)૪૨૨.૮૫૯૩(પણ આમાં ભાગાકારમાં ત્રણ દશાંશ લાવવા છે ને બે અંક પૂર્ણાંકના આવશે માટે ભાજકમાં પાંચ અંકની જરૂર પડવાની. તેથી ૨૫.૮૭૦ સુધીના અંક પહેલા ભાગ એક સાથે ગુણવાને અને ૬ વદી લેવાને રાખી બાકીના કામમાં લીધા નથી. હવે ભાગાકારમાં પહેલો અંક દશકનો આવશે તેનો ને ૭ સહસ્રાંશનો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે ભાજ્યના શતાંશ ૫ સુધીનાઆંકડા કામમાં આવશે ને છેલ્લા બે પડયા રેહેશે બીજો ભાગ ૬ એકમે જશે. ૭ એકમનો ને ભાજકના .૦૭ શતાંશનો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે શૂન્ય પડયું મૂકી સાતથી ગુણાકાર કર્યો છે. તેમ ૪ ત્રીજેઅંક ભાગાકારમાં ૩ દશાંશ આવશે, એનો તે ભાજકના .૮નો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે સાતના ગુણાકારની વદી માત્ર આઠના ગુણાકારમાં ઉમેરી છે. એજ રીતે એકેક અંક કાપ્યાથી ભાજ્યનો શતાંશ આવેછે માટે આંકડા કાપવામાં આવે છે.

ટીકા–લાલશંકરકૃત જુના અંકગણિતના ૬૨મા મનોયત્નના છેલ્લા હિસાબ જેવા હિસાબમાં અનંત રકમોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરવી હોય ત્યારે જેટલા આંકડા દશાંશમાં ખરા લાવવાના હોય તેટલાં મીડાં પ્રથમ આવે ત્યાં સુધીની રકમો લેઇ સરવાળો કરવો અને કેટલીકનો સરવાળો ને કેટલીકની બાદબાકી કરવી હોય તો સરવાળો કરવાની રકમો એકઠી કરવી ને બાદ કરવાની રકમો એકઠી કરવી, પછી તે બંનેની બાદબાકી કરવી. જેટલાં દશાંશ સ્થળ ખરાં લાવવાં હોય તેટલાં મીડાં પ્રથમ આવે ત્યાં સુધીની રકમો લેવી કેમકે તે પછીની રકમો લીધાથી તે લાવવાના આંકડાની કિંમતમાં કાંઇ ફેર પડતો નથી, તેથી તે રકમો મૂકી દેવામાં આવેછે.

કાચાપાકા તોલની રીતનું કારણ–કાચાપાકા તોલ-

માં ૪૨ તોલે ૨૧મો, ૪૪ તોલે અગીઆરમો, ૪૫ તોલે નવમો, ૪૮ તોલે છઠ્ઠો, ૫૦ તોલે પાંચમો, ૫૨ તોલે ૪⅓ મો, ૫૬તોલે ૩½મો, ૬૦ તોલે ૩ જો ભાગ કાચા તોલ-માંથી કાપ્યાથી પાકો તોલ આવે છે, કેમકે ૪૨ તોલે કાચા એકમણે બશેર કાપ્યાથી પાકો મણ થાય છે ને બશેર એ કાચા મણનો ૨૧મો ભાગ છે. તેમજ ૪૪ તોલે કાચા મણે ચાર શેર કાપ્યાથી પાકો મણ થાય ને ચારશેર એક કાચા મણનો ૧૧ મો ભાગ છે. એજ પ્રમાણે ૬૦ તોલમાં મણે ૨૦ શેર કપાય ને ૨૦ શેર એ કાચા મણનો અથવા ૬૦ નો ૩જો ભાગ છે ઇત્યાદિ.

પ્રમાણ.

એક સંખ્યાને બીજી સંખ્યા સાથે સરખાવવી હોય ત્યારે બંને રકમોનું યુગ્મ કે જોડકું કહેવાય. યુગ્મના પહેલા પદને અગ્રસર અને બીજાને ઉપાગ્રસર કહે છે અને અગ્રસર ઉપાગ્રસરથી જેટલા ગણું નાની કે મોટી હોય તેને ગુણોત્તર કહે છે. જેમકે ૪:૧૨ એ બંને મળીને યુગ્મ કહેવાય ને એમાં ૪ અગ્રસર અને ૧૨ ઉપાગ્રસર છે ને ૪/૧૨ અથવા ૧/૩ ગુણોત્તર છે. એક યુગ્મના ગુણોત્તર જેટલુંજ બીજા યુગ્મનું ગુણોત્તર હોય ત્યારે બંને યુગ્મ અથવા બંને યુગ્મનાં ચારે પદો પ્રમાણમાં છે એમ કહેવાય. જેમકે ૪:૧૨ નું ગુણોત્તર ૧/૩ ને ૭:૨૧નું ગુણોત્તર પણ ૧/૩ છે માટેએ બંને યુગ્મનાં ગુણોત્તર બરાબર છે તેથી તે બંને યુગ્મ ૪:૧૨ =૭:૨૧ અથવા ૪:૧૨::૭:૨૧ આ પ્રમાણે લખાય છે. : : અને = આ ચિન્હોનો અર્થ સરખાપણું બતાવવાનોછે. આ ઉપરથી માલમ પડશે કે દરેક યુગ્મનાં અગ્રસરને ઉપાગ્રસર સજાતિય જોઈએ પણ એક યુગ્મનાં પદની સાથે બીજા યુગ્મનાં પદ સજાતિય હોવાનું કારણ નથી. ૪ મણઃ ૧૨મણ : :૭ રૂ:૨૧ રૂ ને એમ કહેવાય. કેમકે એમાં માત્ર એટલોજ

અર્થ છે કે પહેલા યુગ્મનું ગુણોત્તર બીજા યુગ્મના ગુણોત્તરની બરાબર છે. અને ગુણોત્તર માત્ર સાદી સંખ્યાજ છે. પણ ૪મણ:૧૨ કલાક આમ ન લખાય. કેમકે ૪ મણ એ ૧૨ કલાકનો $\frac{૧}{૩}$ છે એમ કહેવાયજ નહીં. એ બે સરખાવાયજ નહીં.

હવે ૪:૧૨::૭:૨૧ એ ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો તેનું ગુણોત્તર $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ હોવું જોઇએ. પણ $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ હોય તો છેદ ઉરાડયાથી ૪×૨૧=૭×૧૨ પણ થાયજ અને પ્રમાણનાં ચારપદોમાં ૪ આદી, ૨૧ અંત અને ૧૨ અને ૭ વચલાં અથવા મધ્ય પદોછે, માટે ચાર પદ પ્રમાણમાં હોય તો આદિને અંતનો ગુણાકાર વચલા બે મધ્યપદોના ગુણાકાર બરાબર થાય. તેમજ ૪:૧૨::૭:૨૧ છે માટે ૧૨:૪::૨૧:૭ એ ચાર પદોપણ પ્રમાણમાં રહેજ એટલે $\frac{૧૨}{૪}=\frac{૨૧}{૭}$ છે. એજ રીતે એ ચાર પદોને જુદી જુદી રીતે ફેરવીને લખીએ તો આઠ રીતે પ્રમાણમાં લખી શકાય.

જો ૪:૧૨::૭:૨૧ એ પ્રમાણમાં હોય તો ૪+૧૨: ૧૨::૭+૨૧:૨૧ છે, કેમકે $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ છે. હવે જો બે બરાબરમાં બરાબર રકમ ઉમેરીએ અથવા બાદ કરીએતો સરવાળો કે બાદબાકી બરાબર રહે, તેથી $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ તેમાં બને તરફ એક ઉમેરીએ તો $\frac{૪}{૧૨}+૧=\frac{૭}{૨૧}+૧$થાય અથવા $\frac{૪+૧૨}{૧૨}=\frac{૭+૨૧}{૨૧}$ થાય. એને પ્રમાણમાં લખીએ તો ૪+૧૨ :૧૨::૭+૨૧:૨૧ આવે. તેમજ ૧૨:૪::૨૧:૭ છે તો ૧૨–૪ : ૪::૨૧–૭:૭ થાય કેમકે $\frac{૧૨}{૪}=\frac{૨૧}{૭}$ છે તે બંનેમાંથી એક બાદ કર્યો તો $\frac{૧૨}{૪}-૧=\frac{૨૧}{૭}-૧$ અથવા $\frac{૧૨-૪}{૪}=\frac{૨૧-૭}{૭}$ થાય અથવા ૧૨–૪:૪::૨૧–૭:૭ આવે.

વળી ૧૨:૪::૨૧:૭ છે તો ૧૨+૪ : ૧૨–૪::૨૧+૭: ૨૧–૭ છે. કેમકે પાછળ કહ્યા પ્રમાણે ૧૨+૪:૪::૨૧+૭:૭ અથવા $\frac{૧૨+૪}{૪}=\frac{૨૧+૭}{૭}$ છે. અને ૧૨–૪:૪::૨૧–૭:૭ અથવા

$\frac{૧૨-૪}{૪}=\frac{૨૧-૭}{૭}$ છે. હવે બરાબરનેબરાબર રકમેગુણે અથવા ભાગે તો તે ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર પણ બરાબર રહે છે માટે $\frac{૧૨+૪}{૪}$ને $\frac{૧૨-૪}{૪}$એ અને $\frac{૨૧+૭}{૭}$ ને $\frac{૨૧-૭}{૭}$એ ભાગીએ તો અપૂર્ણાંક ભાગાકારની રીતે ઊલટાવીને ગુણ્યાતો $\frac{૧૨+૪}{૪}\times\frac{૪}{૧૨+૪}=\frac{૨૧+૭}{૭}\times\frac{૭}{૨૧-૭}$ અથવા $\frac{૧૨+૪}{૧૨-૪}=\frac{૨૧+૭}{૨૧-૭}$ અથવા ૧૨+૪:૧૨-૪::૨૧+૭:૨૧-૭ થાય.

ઉપરની સિદ્ધતાઓથી નીચેના નિયમો નીકળે છે.

૧. જ્યારે ચારપદો પ્રમાણમાં હોય ત્યારે આદિ ને અંતનો ગુણાકાર બે મધ્યપદોના ગુણાકારની બરાબર થાય.

૨. પહેલા અને બીજા પદના અથવા બીજા ને પહેલા પદનો ભાગાકાર તે ત્રીજાને ચોથાનો અથવા ચોથાને ત્રીજાના ભાગાકારની બરાબર થાય.

૩. પહેલાને બીજાનો સરવાળો: બીજાને:: ત્રીજાને ચોથાનો સરવાળો : ચોથાને.

૪. પહેલાને બીજાની બાદબાકી : બીજાને :: ત્રીજાને ચોથાની બાદબાકી : ચોથાને.

૫. પહેલાને બીજાનો સરવાળો : પહેલાને બીજાની બાદબાકીને :: ત્રીજાને ચોથાનો સરવાળો : ત્રીજાને ચોથાની બાદબાકીને છે.

૬. જો ચારપદો પ્રમાણમાં હોય તો બન્ને અગ્રસરોના સરવાળા અથવાબાદબાકી : બન્ને ઉપાગ્રસરોના સરવાળા અથવા બાદબાકી ને છે :: પહેલા અથવા બીજા યુગ્મનું અગ્રસર : પેહેલા અથવા બીજા યુગ્મના ઉપાગ્રસરને છે. જેમકે ૨૧:૭::૧૨:૪ હોયતો ૨૧+૧૨:૭+૪::૨૧:૭ અથવા ૨૧+૧૨:૭+૪::૧૨:૪ અથવા ૨૧-૧૨:૭-૪::૨૧:૭ અથવા ૨૧-૧૨:૭-૪::૧૨:૪

૭. બે યુગ્મ પ્રમાણમાં હોય તો અગ્રસરોનો સરવાળો : અગ્રસરોની બાદબાકીને છે :: ઉપાગ્રસરોનો સ-

રવાળો : ઉપાગ્રસરોની બાદબાકીને છે. જેમકે ૨૧:૭::૧૨:૪ હોય તો ૨૧+૧૨:૨૧−૧૨::૭+૪:૭−૪

૮. જો ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય ને તેમાંનાં કોઇપણ ત્રણ પદ આપ્યાં હોય તો ચોથું અથવા બાકીનું પદ નીકળી શકે. જેમકે ૧૨:૪::૨૧:૭ હોય ને ૧૨:૪::૨૧: ( ) આમાં ચોથું પદ કહાડવું હોયતો ૧૨× ચોથું = ૨૧×૪ છે માટે ચોથાપદ = $\frac{૨૧×૪}{૧૨}$=૭ આવે. તેમજ ૧૨: ૪::( ):૭ આમાં ત્રીજું પદ કહાડવું હોય તો ૧૨×૭=૪×ત્રીજું પદ માટે ત્રીજા પદ=$\frac{૧૨×૭}{૪}$=૨૧ આવે. તેમજ ૧૨:()::૨૧:૭ આમાં બીજુંપદ કહાડવું હોયતો ૧૨×૭= બીજું×૨૧. તો બીજા પદ =$\frac{૧૨×૭}{૨૧}$=૪ આવે. તેમજ ( ): ૪::૨૧:૭ આમાં પેહેલું પદ કહાડવું હોય તો પેહેલું પદ ×૭=૨૧×૪ તો પેહેલાપદ= $\frac{૨૧×૪}{૭}$=૧૨ આવે.

૯. કોઇ પણ બે રકમોના ગુણાકાર બીજી કોઈ પણ બે રકમોના ગુણાકારની બરાબર હોય તો પહેલી બેને આદિ ને અંતપદની જગાએ ને બીજી બેને બે મધ્યપદોની જગ્યાએ મૂકવાથી તે ચારે પદો પ્રમાણમાં થશે. જેમકે ૧૨×૭=૨૧×૪ છે, માટે ૧૨:૨૧::૪:૭ પ્રમાણમાં આવે, વળી જો બે રકમોનો ભાગાકાર બીજી બે રકમના ભાગાકાર બરાબર હોય તો પહેલી બેને પહેલા યુગ્મમાં ને બીજી બેને બીજા યુગ્મમાં અગ્રસર ને ઉપાગ્રસરની જગાએ મૂકવાથી તે ચારે પદો પ્રમાણમાં થશે. જેમકે $\frac{૧૨}{૪}$= $\frac{૨૧}{૭}$ છે માટે ૧૨:૪::૨૧:૭ પ્રમાણમાં આવે.

૧૦ તેથી જો સરખા ગુણોત્તરનાં ઘણાં યુગ્મ પ્રમાણમાં હોય તો બધા અગ્રસરોનો સરવાળો : બધા ઉપાગ્રસરોના સરવાળાને ::કોઇ પણ એક યુગ્મનું અગ્રસર : તે તેજ યુગ્મના ઉપાગ્રસરને. જેમ કે ૩:૫,૯:૧૫,૧૮:૩૦,૩૩૦:૫૫૦

હોય તો ૩+૯+૧૮+૩૩૦:૫+૧૫+૩૦+૫૫૦::૩:૫ અથવા $\frac{૩+૯+૧૮+૩૩૦}{૫+૧૫+૩૦\times૫૫૦}=\frac{૩}{૫}$ અથવા $=\frac{૯}{૧૫}=\frac{૧૮}{૩૦}=\frac{૩૩૦}{૫૫૦}$.

૧૧. જો ચાર પદો પ્રમાણુમાં હોય તેવાં સરખાં ગુણોત્તરનાં એક કરતાં વધારે ચાર પદો પ્રમાણુમાં હોય તો દરેક પહેલા યુગ્મના અગ્રસરોનો ગુણાકાર: દરેક પહેલા યુગ્મના ઉપાગ્રસરોના ગુણાકારને છે::દરેક બીજા યુગ્મનાઅગ્રસરોનો ગુણાકાર : દરેક બીજા યુગ્મના ઉપાંગ્રસરોના ગુણાકારને છે. જેમકે,

૪:૭ :: ૧૨:૨૧ ૫:૧૮ ::૧૨૦: ૪૩૨ ૧૩:૯ :: ૩૯ : ૨૭	તો ૪×૫×૧૩:૭×૧૮×૯::૧૨×૧૨૦×૩૯:૨૧×૪૩૨×૨૭

ત્રીરાશી.

ત્રીરાશીની રીત ને કારણ—ઉપર પ્રમાણુના જે નિયમો આપ્યાછે તેનો જેમાં ઉપયોગ થાયછે તેને ત્રીરાશી કહે છે. કેમકે એમાં પ્રમાણનાં ચાર પદોમાંનાં ત્રણ આપેલાં હોય છે, ને ચોથું પદ કહાડવાનું હોયછે. પ્રમાણુમાં આપણે કહી ગયા કે પ્રમાણનાં ચારે પદો સજાતિયજ હોવાં જોઇએ એમ નથી, પણ દરેક યુગ્મનાં પદો તો સજાતિય જોઈએજ. ત્રીરાશીમાં ચારમાંનાં ત્રણ પદો આપેલાં હોયછે તેમાં એક યુગ્મનાં બે સજાતિય પદો આપેલાં હોયછે ને બીજા યુગ્મનું એક પદ આપેલું હોયછે ને તેની જાતનું ચોથું પદ કહાડવાનું હોયછે માટે ત્રીરાશીના હિસાબમાં વિચારી જોવું કે કયાં સજાતિય બે પદો પ્રમાણુમાં આપેલાંછે. અને કયા પદની જાતનો જવાબ કહાડવાનોછે. પછી એ ત્રણ પદોને પ્રમાણુમાં લખી ચોથું પદ કહાડવું. જેમકે ૪ માણુસ ૨૦ ફીટ વાડ કાપે તો ૧૬ માણુસ કેટલા ફીટ વાડ કાપશે. આમાં ચાર માણુસ ૧૬ માણુસ સાથે જે પ્રમાણુમાં છે તે પ્રમાણુમાં ૨૦ ફીટ જવાબની સાથે રહેશે. એટલે જવાબ ફૂટનો કહાડવાનો છે

માટે ૪ માણુસ:૧૬ માણુસને :: ૨૦ ફીટ: જવાબ. હવે પાછળ પ્રમાણમાં કહ્યા પ્રમાણે ૪ આદીxઅંત જવાબ= ૧૬x૨૦ તેથી ૪xજવાબ=૩૨૦ તો જવાબ=૮૦ ફીટ કેમકે પહેલા યુગ્મમાં અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર જેટલા ગણુાછે તેટલાજ ગણુા બીજા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર આવવા જોઈએ, અથવા ૪:૧૬ :: ૨૦ : જવાબ, એટલે $\frac{૪}{૧૬} = \frac{૨૦}{જવાબ}$. તો ૪ x જવાબ = ૨૦ x ૧૬ તો જવાબ=૮૦.

આવી ત્રીરાશીઓને સમત્રીરાશી કહેછે. કેમકે જેમ માણુસ વધારેછે તેમ કાળ પણુ વધારે થાયછે. તેમજ અમુક ચીજની કીંમતમાં ચીજોની સંખ્યા વધે કે ઘટે તેમ કીંમત પણુ વધે કે ઘટે. માલ લેઈ જવાનું ભાડું, માલ વધે કે ઘટે તે પ્રમાણુમાં અથવા અંતર વધે કે ઘટે તે પ્રમાણુમાં વધે કે ઘટે. જમીનનું ગણોત, જમીન વધે કે ઘટે અથવા મુદ્દત વધે કે ઘટે, તે પ્રમાણુમાં વધેકે ઘટે. મજૂરની મજુરી, મજુરની સંખ્યા વધે કે ઘટે અથવા વખત વધે કે ઘટે તે પ્રમાણુમાં વધે કે ઘટે. નાણાંનું વ્યાજ. વ્યાજે મૂકેલી રકમ વધે કે ઘટે અથવા મુદ્દત વધે કે ઘટે તે પ્રમાણુમાંવધે કે ઘટે. વગેરે. આ પ્રકારના હિસાબને સમત્રીરાશી કહેછે.

વ્યસ્ત ત્રીરાશીની રીત ને કારણ—જ્યારે પહેલા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર વધારે હોય તોપણુ બીજા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર ઓછું આવવાનું હોય તેને વ્યસ્ત ત્રીરાશી કહેછે. જેમકે ૪ માણુસ કોઇકામ ૨૦ દિવસમાં કરેતો ૧૬ માણુસ કેટલા દિવસમાં કરે. આમાં ચાર માણુસ કરતાં ૧૬ માણુસ ૪ ગણાંછે, પણુ દિવસ ચાર ગણા ઓછા લાગશે. એટલે માણુસ વધ્યાથી મુદત ઘટી તેથી એ વ્યસ્ત પ્રમાણુ થયું એને સમત્રીરાશીનો માફક પ્રમાણુમાં મૂકીએ તો પ્રમાણુ રહેશે નહીં. કેમકે ૪ માણુસ : ૧૬ માણુસ::

૨૦ દિવસ : ૫ દિવસ અથવા જવાબને છે. આમાં ચાર ગ- ણું માણસ વધ્યાથી કામ ચારગણું જલદી થવાનું માટે દિવસ તો પાંચજ થવાના. તો ઉપર મુજબ પ્રમાણ મૂક્યા- થી આદિ ૪×અંત ૫ = બે મધ્ય પદો ૧૬×૨૦ થશે નહીં. માટે પહેલા યુગ્મના અગ્રસરને ઉપાગ્રસરની જગોએ અને ઉપાગ્રસરને અગ્રસરની જગાએ મૂકવું જોઇએ. તેથી ૧૬ માણસ: ૪ મા. : : ૨૦ દિ. : ૫ દિ. એટલે ૧૬×૫=૨૦× ૪ આવ્યા. અને એ પ્રમાણે પહેલા યુગ્મનાં પદ ઊલટાવવાં પડેછે માટે એને વ્યસ્ત પ્રમાણ કહે છે. એજ પ્રમાણે જેમ કપડાંનો પહોળાઇ વધે તેમ લંબાઇ ઓછી જોઇએ. અમુક કીંમત પૂરી કરવાને જેમ સિક્કાની કીંમત વધે તેમ સિક્કા- ની સંખ્યા ઘટે. અમુક અંતર જવામાં જેમવખત વધે તેમ ચાલવાનું માપ ઘટે. અમુક ભાડામાં માલ લેઇ જવા સારૂ જેમ વજન વધે તેમ અંતર ઘટે. વગેરે જાતના હિસાબ વ્ય- સ્ત રાશીના છે.

બહુરાશીએટલેશું?–બેઅથવાતેથીવધારે ગુણોત્તરઉપરથી નવું ગુણોત્તર ઊત્પન્ન કરીએ તે ગુણોત્તરને મિશ્રગુણોત્તર કહેવાય. જેમ ૫:૬=$\frac{૫}{૬}$ અને ૭:૧૨=$\frac{૭}{૧૨}$ આ ગુણોત્તરમાંનાં અગ્રસર ૫ને ૭ અને ઉપાગ્રસર ૬ અને ૧૨નો ગુણાકાર કરી ૩૫:૭૨= $\frac{૩૫}{૭૨}$ એ ગુણોત્તર ઉત્પન્ન કર્યું. એ મિશ્રગુણોત્તર તે ગુણો- ત્તરના અપૂર્ણાંકોના ગુણાકારને મળતું આવેછે. જેમકે ૫: ૬=$\frac{૫}{૬}$ ગુણોત્તર અને ૭:૧૨=$\frac{૭}{૧૨}$ ગુણોત્તર. એ બેનો ગુણાકાર $\frac{૫}{૬}$×$\frac{૭}{૧૨}$=$\frac{૩૫}{૭૨}$ આવ્યા એટલે ગુણોત્તર ૩૫ : ૭૨ આ પ્ર- માણનું છે. ઘણાં પ્રમાણ એકઠાં કરવાને આ પ્રમાણે મિશ્ર ગુણોત્તર કહાડવું પડે છે. એ મિશ્ર ગુણોત્તરના પ્રમાણને મિશ્ર પ્રમાણ અથવા બહુરાશી પ્રમાણ કહેછે.

બહુરાશીનું કારણ—જ્યારે બે ગુણોત્તર ત્રીજા પદમાં જૂદી જૂદી રીતે વધઘટ કરે ત્યારે તે વધઘટ એ બે ગુણો-

ત્તરથી થયેલા મિશ્રગુણોત્તરથી થતી વધઘટની બરાબર થવી જોઈએ. માટે એ બંને ગુણોત્તરમાંના અગ્રસરે અગ્રસરનો ને ઊપાગ્રસરે ઊપાગ્રસરનો ગુણાકાર કરીને નવું અગ્રસર ને ઉપાગ્રસર ઊત્પન્ન કરી ત્રીજા પદમાં થતીવધઘટ કહાડીએ છીએ.

સાંકળ રીતી.—જૂદી જૂદી ત્રીરાશીઓ એકઠી કરવાની રીતને સાંકળરીતી કહેછે. તેથી એ રીતનું કારણ ને પ્રમાણનું કારણ સરખુંજછે માટે તે આ ઠેકાણે ફરીને સમજાવ્યું નથી.

વ્યાજ.

વ્યાજ એટલે રૂપિઆનું ભાડું. કોઇ રકમ લેતી વખત તેને જે નફો આપવાનું કબુલ કરીએ તે વ્યાજ. એ વ્યાજ સો રૂપિઆ ઉપર મહિને કે વરસે ઠરાવેછે. વ્યાજના હિસાબમાં જેટલા રૂપિઆલે તે મુદ્દલ. જેટલો વખત એ રૂપિઆ રહે તે મુદ્દત. એ રૂપિઆ ઉપર સો રૂપિએ એક વરસે જે રકમ આપવાનું ઠરાવ્યું હોય તે તેરીખ ને એ તેરીખને મુદ્દત પ્રમાણે એ રૂપિઆ ઉપર જેટલું વધારે આપવાનું થાય તે વ્યાજ, ને વ્યાજ મુદ્દલ મળીને જેટલું થાય તે રાશ કે વ્યાજમુદ્દલ કહેવાય.

સાદાવ્યાજની રીતનું કારણ.—વ્યાજ,મુદ્દલને મુદ્દતના પ્રમાણમાં વત્તુંઓછું થાયછે. સો રૂપિયા ચાર ટકાની તેરીખે એક વરસ રહે તો ચાર રૂપિઆ વ્યાજ થાય પણ બે વરસ રહે તો આઠ થાય. અથવા બસેં રૂપિઆ એક વરસ રહે તો આઠ રૂપિઆ થાય ને બે વરસ રહે તો સોળ રૂપિઆ થાય. તેમજ સો રૂપિઆ એક વરસ ૫ ટકાની તેરીખે રહે તો પાંચ રૂપિઆ ને બે વરસ રહે તો દશ રૂપીઆ થાય. એ વ્યાજને સાદું વ્યાજ કહેછે ને એના હિસાબ પંચરાશી રીતેજ પ્રમાણ બાંધ્યાથી થાયછે માટે એનું કારણ ને ત્રીરાશીનું કારણ એકજ છે. જેમકે પાંચ ટકા લેખે ચાર વરસે ૨૦૦ રૂપિઆનું વ્યાજ શું?

१०० રૂ. : २०० રૂ. } :: ૫ ટકા વ્યાજ જવાબ.
૧વ   ૪વ. }

એટલે. $\frac{२००\times૪\times૫}{१००}$= ૪० રૂપિઆ વ્યાજ એ જવાબ.

આ પ્રમાણ ઉપરથી સાદું વ્યાજ કહાડવાની નીચેની રીત નીકળી છે.

મુદ્દલ, મુદ્દતનાં વર્ષ ને તેરીખના ગુણાકારનેસોએ ભાગવા તેથી વ્યાજ આવશે. એટલે વ્યાજ= $\frac{મુદ્દલ\times મુદ્દત \times તેરીખ}{१००}$

સાદા વ્યાજમાં મુદ્દલ, મુદ્દત, તેરીખ ને વ્યાજ એ ચારમાંથી કોઈ પણ ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તો ચોથું પદ કહાડવાના કોઠા શી રીતે ઉત્પન્ન થાયછે તે.

મુદ્દલ કહાડવું હોય તો—જેમકે ૫ ટકાની તેરીખે ૪ વર્ષે ૪० રૂ. વ્યાજ થયું તો મુદ્દલ શું? એનું પ્રમાણ—

૫ રૂ. વ્યાજ:૪० રૂ. વ્યાજ: :१०० મુદ્દલ:જવાબ મુદ્દલ.

१ વ: ૪વ.: વ્યસ્ત પ્રમાણ છે માટેઉલટાવ્યા તેથી

$\frac{૪०\times१००}{૫\times૪}$=२०० મુદ્દલ જવાબ. તે ઉપરથી નીચેનું કોઠક ઉત્પન્ન થાય છે. મુદ્દલ=$\frac{१००\times વ્યાજ}{તેરીખ\times મુદ્દત}$

મુદ્દત કહાડવી હોય તો—પાંચ ટકા લેખે બસેં રૂપીઆનું ૪० રૂ. વ્યાજ થયું ત્યારે મુદ્દત કેટલી? એનું પ્રમાણ.

બીજું પ્રમાણવ્યસ્તછે ૫રૂ. વ્યાજ:૪० રૂ. વ્યા::१વ:જ.વ.

તે ઉલટાવ્યું તો.   २००   :१००

તેથી$\frac{૪०\times१००}{૫\times२००}$=૪ વરસ જવાબ. તે ઉપરથીંનીચેનો કોઠો ઉત્પન્ન થાય છે. મુદ્દત= $\frac{१००\times વ્યાજ}{તેરીખ\times મુદ્દલ}$

તેરીખ કહાડવી હોય તો— २०० રૂ.નું ૪ વરસે ૪०રૂ. વ્યાજ થયું ત્યારે તેરીખ શી? એનું પ્રમાણ.

૨૦૦ રૂા. મુ. : ૧૦૦ રૂા. મુ. :: ૪૦ રૂા. વ્યાજ. મુ: : તે. જવાબ
૪ વ. : ૧વ.

બંને સમ પ્રમાણું છે તેથી $\frac{૧૦૦ \times ૪૦}{૨૦૦ \times ૪}$=૫ રૂ. તેરીખ જવાબ.

તે ઉપરથી નીચેની રીત નીકળે છે. તેરીખ=$\frac{૧૦૦ \times \text{વ્યાજ}}{\text{મુદ્દલ} \times \text{મુદ્દત}}$

ટીકા—મુદ્દતમાં વર્ષ, માસ ને દિવસ આપ્યા હોય તો તે બધાને વરસનું રૂપ આપવું. તેમાં ૩૦ દિવસનો મહિનો ને બાર મહીનાનું વરસ ગણવું. વરસને દિવસ આપ્યા હોય તો દિવસને ૩૬૫ ભાગી વરસનું રૂપ આપવું. ઈંગ્રેજી મહિના આપ્યા હોય તો તે મહિનાના દિવસ પ્રમાણે દિવસ ગણીને પછી વરસનું રૂપ આપવું.

સરકારી નવા અંકગણિતના ૬૭મા મનોયત્નના ૨૦ ૨૧ જેવા હિસાબ સાદા વ્યાજની રીતમાં આવે, પણ તેમાં થોડો તફાવત છે. તેમાં મુદ્દલનું સવા વરસનું વ્યાજ અને એજ રકમ સવા વરસ પછી દેવી થવાની હોય તો મુદત કાપવાની રકમ આપેલીછે ને તે ઉપરથી તેરીખને મુદ્દલ કહાડવાનું છે. મુદ્દત કાપવાની રકમમાં તેનું વ્યાજ ઉમેરીએ તો આપેલું વ્યાજ થાય છે. જેમકે પાંચ ટકા લેખે સો રૂપીઆનું વ્યાજ ૫ રૂપીઆ થાય ને મુદત કાપવાના $\frac{૧૦૦}{૨૧}$થાય ને એ મુદત કાપવાની રકમમાં તેનું વ્યાજ $\frac{૫}{૨૧}$ ઊમેરીએ તો વ્યાજના જેટલા $\frac{૧૦૫}{૨૧}$=૫ રૂ. થાય છે. માટે ઉપલા હિસાબમાં પણ મુદ્દત કાપવાની રકમ ૩૦ +તેનું વ્યાજ=૩૦$\frac{૨૭}{૩૨}$ છે માટે ૩૦$\frac{૨૭}{૩૨}$-૩૦=$\frac{૨૭}{૩૨}$ રૂ. ૩૦ રૂ. નું સવા વર્ષનું વ્યાજ થયું તેથી $\frac{૨૭}{૩૨}$વ્યાજ : ૩૦$\frac{૨૭}{૩૨}$ :: ૩૦ મુ. : જવાબ ૧૦૯૬$\frac{૨}{૩}$ મુદ્દલ આવ્યું તે ઉપરથી તેરીખ કહાડવાને તેરીખ=$\frac{૧૦૦ \times ૩૦\frac{૨૭}{૩૨}}{૧૦૯૬\frac{૨}{૩} \times \frac{૫}{૪}}$=૨$\frac{૧}{૪}$ જ.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની રીતનું કારણ.

જેમાં વ્યાજનું વ્યાજ ગણવામાં આવેછે તેને ચક્રવૃદ્ધિ

વ્યાજ કહેછે. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં વરસે વરસે કે હપ્તે હપ્તે મુદલનું વ્યાજ ગણી મુદલમાં મેળવી જે રાશ થાય તેને બીજા વરસનું કે બીજા હપ્તાનું મુદલ ગણવામાં આવે છે. એ પ્રમાણે આપેલી મુદ્દત સુધી ગણાય છે જેમકે ૫૦૦ રૂપિઆનું બે વરસનું ૫ ટકા લેખે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શું ?

૧૦૦ : ૫૦૦ :: ૫ : ૨૫ રૂ. વ્યાજ પહેલે વરસે થયું. તે + ૫૦૦ મુદલ = બીજા વરસનું મુદલ થયું માટે બીજા વરસનું વ્યાજ કહાડવાને ૧૦૦:૫૨૫::૫:૨૬$\frac{1}{4}$ વ્યાજ થયુંતે +૫૨૫ મુદલ = ૫૫૧$\frac{1}{4}$ બે વરસે વ્યાજને મુદલ મળીને થયું અથવા તેમાંથી ૫૦૦ મુદલ બાદ કરીએ તેા ૫૧$\frac{1}{4}$ ચક્રવૃધ્ધિ વ્યાજ થયું. ઉપરના ત્રિરાશી પ્રમાણથી ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની રીતનું કારણ સમજાશે. પણ ઘણી મુદતનું કહાડવું હેાય, અને મુદલને તેરીખ અપૂર્ણાંક હેાય ત્યારે લંબાણ ઘણું થાયછે. તેથી એક ટુંકી રીત છેલ્લી રીત ઉપરથી કરેલી છે તે નીચે પ્રમાણે છે.

કહેલી તેરીખ પ્રમાણે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ કહાડી તેનેા મુદતની સંખ્યા જેટલેા ઘાત કરવેા અને તે ઘાતને મુદલે ગુણવા. ગુણાકાર આપેલી મુદતની રાશ થશે. માટે જો ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહાડવું હેાય તેા આવેલી રાશમાંથી આપેલું મુદલ બાદ કરવું એ જવાબ.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ ગણવાની સહેલી રીતનું કારણ.

આ કારણ દાખલાથી જલદી સમજાશે માટે ઉપરનેાજ દાખલેા લેઇએ.

૧૦૦ રૂ.નું પાંચ રૂપીઆ વ્યાજતેા એક રૂપીઆનું કેટલું. ૧૦૦ : ૧ :: ૫ : ·૦૫ એટલે બીજા વરસનું મુદલ=૧+·૦૫= ૧·૦૫ તે બીજા વરસનું વ્યાજ કહાડવાને ૧ રૂ.ની ૧·૦૫ રાશ તેા ૧·૦૫ની રાશ કેટલી? એટલે,

૧: ૧·૦૫ મુ. રૂ:: ૧·૦૫ વ્યાજ મુદલ: જવાબ. તેથી $\frac{૧·૦૫×૧·૦૫}{૧}$=૧·૧૦૨૫ અથવા $(૧·૦૫)^{૨}$=૧·૧૦૨૫ આવેલી એક રૂપિઆની રાશ માટે ૧·૧૦૨૫×૫૦૦=૫૦૦ રૂ.ની રાશ. પણ જો ચક્રવૃધ્ધિ વ્યાજ કહાડવું હોયતો ·૧૦૨૫× ૫૦૦=૫૦૦ રૂ.નું ચક્રવૃધ્ધિ વ્યાજ.

એજ પ્રમાણે પાંચસેં રૂપીઆનું ચાર વરસનું વ્યાજ કહાડવું હોયતો એક રૂપીઆની રાશ બીજે વરસે ૧·૧૦૨૫ થઈ છે તે ત્રીજા વરસનું મુદલ છે માટે ૧ રૂ. મુ: ૧·૧૦૨૫ રૂ. મુ. :: ૧·૦૫ રૂ. વ્યાજ મુદલ: જવાબ.

માટે ૧·૧૦૨૫×૧·૦૫ ત્રીજા વરસની રાશ અથવા ચોથા વરસનું મુદલ આવ્યું તેથી ચોથા વરસની રાશ કહાડવાને ૧ રૂ. મુ.: ૧·૧૦૨૫×૧·૦૫ રૂ. મુ :: ૧·૦૫ રૂ. વ્યાજ મુદલ: જવાબ.

માટે ૧·૧૦૨૫×૧·૦૫×૧·૦૫ અથવા૧·૧૦૨૫×૧·૧૦૨૫ અથવા $(૧·૧૦૨૫)^{૨}$=એક રૂપીઆની ચાર વરસની રાશ એને મુદલે ગુણ્યા તો $(૧·૧૦૨૫)^{૨}$×૫૦૦=કુલરાશ−૫૦૦ =ચક્રવૃધ્ધિ વ્યાજ એ જવાબ.

ટીકા—ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં વરસની સાથે માસ દિવસ હોય તો જેટલા માસને દિવસ હોય તેને અથવા દિવસ હોયતો તેને વરસનું રૂપ આપવું. પછી ઉપરની રીત પ્રમાણે પૂર્ણાંક વરસનું વ્યાજ કહાડી જે રાશ આવે તેનું સાદાવ્યાજની રીતે અપૂર્ણાંક વરસનું વ્યાજ કહાડવું તે વ્યાજને પ્રથમ આવેલા વ્યાજનો સરવાળો કરવો એ જવાબ.

જેમ સાદા વ્યાજમાં મુદલ, મુદત, તેરીખ ને વ્યાજ એ ચારમાંથી કોઇપણ ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનું પદ નીકળેછે તેમ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં પણ નીકળેછે.

મુદત, તેરીખ ને વ્યાજ ઉપરથી મુદલ કહાડવું હોય તો તેની રીત ને કારણ—એક રૂપિઆની આપેલી

મુદતના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે આપેલા વ્યાજને ભાગવા કેમકે એક રૂપિઆના આપેલી મુદતના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજને મુદલે ગુણવાથી વ્યાજ આવેછે એટલે વ્યાજ=એક રૂપિઆનું આપેલી મુદતનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ×મુદલછે માટે મુદલ=વ્યાજ÷એક રૂપિઆનું આપેલી મુદતનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ.

મુદલ, મુદતને વ્યાજ ઉપરથી તેરીખ કહાડવી હોય તો તેની રીત ને કારણ—વ્યાજને મુદલે ભાગવા એટલે એક રૂપિઆનું આપેલી મુદતનું વ્યાજ આવશે તેમાં એક રૂપિઓ ઉમેર્યાથી એક રૂપિઆની આપેલી મુદતની રાશ થશે, માટે તેનું આપેલી મુદત જેટલું ઘાત મૂળ કહાડવું, તેથી એક રૂપિઆનું એક વરસનું વ્યાજ મુદલ આવશે તેમાંથી એક બાદ કર્યાથી એક રૂપિઆનું એક વરસનું વ્યાજ રહેશે, તેને સોએ ગુણ્યાથી તેરીખ આવશે. જો વ્યાજને બદલે રાશ આપી હોય તો તેને મુદલે ભાગ્યાથીજ એક રૂપિઆની આપેલી મુદતની રાશ આવશે, તે ઉપરથી ઉપર પ્રમાણે તેરીખ કહાડવી. કેમકે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશને મુદત જેટલા ઘાત કરી મુદલે ગુણ્યાથી કુલ રાશ આવેછે અથવા તેમાંથી મુદલ બાદ કર્યાથી કુલ વ્યાજ આવે છે માટે મુદલે ભાગ્યાથી એક રૂપિઆની એક વરસની રાશનો મુદત જેટલા ઘાત આવે, માટે તેનું ઘાતમૂળ તે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ આવે, તેમાંથી એક રૂપિઓ મુદલ બાદ કર્યાથી વ્યાજ રહે તેને સોએ ગુણ્યા એટલે તેરીખ આવે.

મુદલ, તેરીખ ને વ્યાજ ઉપરથી મુદત કહાડવી હોય તો તેની રીત ને કારણ—વ્યાજને મુદલે ભાગી એક રૂપિઓ ઉમેરવો. એટલી એક રૂપિઆની મુદત પ્રમાણે રાશ થશે. એ રાશ, તેરીખ ઉપરથી એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ કહાડી તેનો વર્ગ, ઘન કે ચતુર્ઘાત કરવાથી જે આવે તેની બરાબર થાય તો બે, ત્રણ કે ચાર વરસ મુદતનાં આવશે.

મતલબ કે પ્રથમ આવેલી રાશ એક રૂપિઆની એક વરસની રાશના ક્યા ઘાતની બરોબરછે તે કહાડવું એટલે જેટલા ઘાત કર્યા હોય તેટલાં વરસ મુદતનાં જાણવાં. જો વર્ગની બરાબર થાય તો બે વર્ષ, ઘનની બરાબર થાય તો ત્રણ ને ચતુર્ઘાતની બરાબર થાય તો ચાર. એજ પ્રમાણે આગળ પણ જાણવું.

ટીકા–વરસની સાથે મહિના કે દિવસ આવવાના હોય તો ઉપર પ્રમાણે વરસ કહાડ્યા પછી તેટલા વરસની આલા મુદ્દલની ઉપરની રીતે રાશ કહાડવી ને તે આપલી રાશમાંથી બાદ કરવી. બાકી રહે તેટલું વ્યાજ થવાને છેલ્લી જે રાશ બાદ કરી હોય, તેને મુદ્દલ ગણી કેટલા દિવસ લાગશે તે સાદા વ્યાજની રીતે કહાડવા, કેમકે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ ઉપરથી બીજા વરસની રાશ કહાડીએ તે, આપેલી એક રૂપિઆની રાશ બરાબર થાય તો મુદત બેજ વરસ હોવી જોઇએ. પણ ત્રીજા વરસની રાશની બરાબર થાય તો ત્રણ વરસજ મુદતનાં હોવાં જોઇએ. એ ઉપરથી ઉપરની રીત કહાડી છે.

વટાવ ને મુદત કાપવા વિષે.

વટાવ કાપી આપવાનો માલની ખરીદી ઉપર હોયછે, એટલે પાંચ ટકા વટાવ કાપવાનો હોય તો સો રૂપિઆના માલની ખરીદી કરીએ તો પાંચ રૂપિઆ વટાવના કાપી આપે, એટલે સો રૂપિઆના ૯૫ રૂપિઆ રોકડા આપવા પડે. અને તે ઉપરથી જેટલાનો માલ લીધો હોય તે પ્રમાણમાં વટાવ કાપી આપે. તેથી એવા હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાય છે માટે તેનું કારણ ત્રીરાશી જેવું જ છે.

મુદત કાપવાની રીત ખરી શાથી છે તેનું કારણ.

મુદત કાપવી એટલે અમુક મુદત પછી અમુક દરે કોઈ રકમ દેવી થવાની હોય, તે રકમ હાલ લેવાને તેમાંથી આપેલી

મુદતનું જે વ્યાજ કાપી આપવું તે. એ રકમમાંથી વ્યાજ કાપતાં જે બાકી રહે તેને તુર્ત કીંમત કહે છે. એ તુર્ત કીંમતને આપેલા દરે આપેલી મુદત સુધી વ્યાજે રાખ્યાથી દેવી થવાની રકમની બરાબર થવી જાઇએ. માટે પાંચ ટકા લેખે એક વરસ પછી ૧૦૫ રૂપિઆ દેવા થવાના હોય તો તેની તુર્ત કીંમત સો રૂપિઆ હોવી જોઇએ, કેમકે સો રૂપિઆને એક વરસ પાંચ ટકા લેખે વ્યાજે મૂકીએ તો ૧૦૫ રૂપિઆ થાય છે. ને તેમાં પાંચ રૂપિઆ મુદત કાપવાની રકમ છે. પણ પાંચ ટકા લેખે ૧૦૦ રૂપિઆ દેવા થવાના હોયતો તુર્ત કીંમત ૯૫ રૂપિઆ ન આવે, કેમકે ૯૫ રૂપિઆને પાંચ ટકા લેખે એક વરસ વ્યાજે રાખ્યાથી સો રૂપિઆ થતાનથી. પણ પાંચ રૂપિઆના વ્યાજ જેટલા ઓછા રહે છે. એટલે સો રૂપિઆની મુદત કાપવાની રકમ પાંચ રૂપિઆમાંથી પાંચ રૂપિઆના વ્યાજ જેટલી ઓછી રહે છે. તે સો રૂપિઆનું વ્યાજ પાંચ રૂપિઆ આવે છે. માટે જો કોઈરકમની મુદત કાપવાની રકમ આપી હોય તો તેમાં તે મુદત કાપવાની રકમનું વ્યાજ ઉમેરીએ તો તે મૂળ રકમનાવ્યાજની બરાબર થવું જોઇએ-

વેપારીની રીત ખોટી શાથી છે તેનું કારણ.

ઉપર પ્રમાણે મુદત કાપવાની રીતને વાસ્તવિક રીત કહેછે, પણ વેપારી લોકો તેમ કરતા નથી. તેમને લાંબી મુદત કાપવાહોતી નથી. તેઓ પાંચ ટકા લેખે એક વરસની મુદત કાપવી હોયતો એકદમ સોના પંચાણું લે છે. કેમકે ગણવાને સુગમ પડે છે. ને લાંબી મુદત કાપવાની નહિ હોવાથી ઝાઝો ફેર પડતો નથી. પણ એ રીત વાજબી કહેવાય નહિ. આ મુદત કાપવાની રીતને વેપારીની રીત કહે છે.

ઉપરની રીત સાદે વ્યાજે મુદત કાપવાની છે, કેમકે મુદત એક વરસની અંદર ઘણું કરીને હોય છે. પણ વ-

રસ કરતાં વધારે મુદત કાપવાની હોય ને તે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે કાપવાની હોયતો એક રૂપિઆની આપેલી મુદત સુધીની આપેલે દરે રાશ કહાડવી, તે રાશ ઉપરથી ત્રિરાશી રીતે આપેલી રકમની મુદત કાપવાની રકમ કહાડવી. એટલે એ રાશમાંથી એક રૂપિઓ બાદ કરીએ તો તે એક રૂપિઆની જે રાશ આવી હોય તેની મુદત કાપવાની રકમ થઇ, માટે એક રૂપિઆની રાશઃ આપેલી દેવી થવાની રકમને :: એક રૂપિઆની રાશની મુદત કાપવાની રકમઃ મુદત કાપવાની રકમને=જવાબ.

ટીકા–હિંદુ મહિના હોય તો તે પ્રમાણે મહિનાના દિવસ ગણી વરસના ૩૬૦ દિવસ ગણવા. મહિનાના ૩૦ દિવસ ને વરસના ૧૨ મહિના. પણ અંગ્રેજી મહિના હોયતો તે મહિનાના દિવસ પ્રમાણે દિવસ ગણી વરસના ૩૬૫ દિવસ ગણવા. દિવસ ગણવામાં પહેલો ને છેલ્લો બે દિવસમાંથી માત્ર એક દિવસ ગણવો.

વીમો કમિશન વગેરે.

અગ્નિ, જળ વગેરેથી પોતાના માલને નુકશાન ન થાય તે માટે કીમ્મત ઉપર દર સેંકડે જે રકમ આપવાની ઠરાવીએ એ ઠરાવને વિમો કહેછે; ને એ જોખમ રાખનારને જે રકમ આપવાની ઠરે તેને વીમા ખર્ચ કહેછે; તથા એ ઠરાવના લખતને વીમા ચીઠી કહેછે. આ હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાયછે. જેમકે સેંકડે ૫ ટકા લેખે ૫૦૦ના માલનું વીમા ખર્ચઃ શું? તો ૧૦૦ માલ : ૫૦૦ રૂ માલ :: ૫,રૂ વીમા ખર્ચ જવાબ=૨૫ રૂપીઆ વીમાખર્ચ.

માલના વીમામાં માલનું નુકશાન થવાથી વીમા ખર્ચ સુદ્ધાંત કીમ્મત ભરી લેવાય એવી રીતે વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો જાણવું કે સો રૂપીઆને બદલે સેંકડે જે વીમા ખર્ચ

હોય તે સોમાંથી બાદ કરતાં બાકી રહે તેટલા રૂપીઆના માલ ઉપર સેંકડાનું વીમા ખર્ચ આપ્યું છે. જેમકે સેંકડે ૫ ટક વીમા ખર્ચ આપ્યું હોય ને માલની કીમત ભરી લેવાની ઠરે તો વીમા ખર્ચ સુદ્ધાંત મળે એવી રીતે વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો ૯૫ રૂ. નો માલ હોવો જોઈએ, કેમકે માલની કિમ્મત ભરી લેઇએ ત્યારે સો રૂપીઆ મળે તેમાંથી ૫ રૂ તો વીમા ખર્ચના આપ્યા છે તે લેતાં ૯૫ રૂપીઆં બાકી રહે છે.

આપણા દેશમાં જીંદગીનો વીમો હાલમાંજ દાખલ થયો છે તેથી એ રીત નવીછે. જીંદગીનો વીમો ઉતરાવીએ ત્યારે જેટલાનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તેટલા રૂપીઆ વીમો ઉતરાવનાર મરી ગયા પછી તેના વારસને વીમો ઉતારનાર આપે એવો ઠરાવ હોયછે. જીંદગીના વીમામાં સેંકડે જે રકમ આપવાની ઠરી હોય તે દરથી જેટલાનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તે પ્રમાણે જે રકમ થાય તેટલી રકમ દર વરસે વીમો ઉતરાવનાર જીવે ત્યાં સુધી આપવી પડેછે. જો એકવાર પણ ન આપે તો પહેલાં આપેલા રૂપિઆ નકામા જાય છે. તેમજ જીંદગીના વીમામાં દર વરસે જે રકમ આપવાની ઠરે તે રકમ વીમો ઉતરાવ્યા પછી તરતજ આપવી પડેછે, ને તે પછી દર વરસે આપવી જોઇએ છીએ. જેમકે ૧૦૦૦ રૂપીઆનો સેંકડે ૫ ટકા પ્રમાણે જીંદગીનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો ૫૦ રૂપીઆ પ્રથમજ આપવા પડે, ને તે પછી દરવરસે તે જીવે ત્યાંસુધી ૫૦ પચાસ રૂપીઆ આપવા પડે. બાદ તે મરી જાય ત્યારે તેના વારસને વીમાવાળા રૂ૧૦૦૦) આપે. એટલે ઉપલાજ હિસાબમાં વીમો ઉતરાવનાર વીશ વરસ કરતાં વધારે જીવે તો તેને નુકશાન થાય ને પાંચ દશ વરસમાં મરી જાય તો વીમો ઉતારનારને નુકશાન ખમવું પડે.

માલના વીમામાં જેમ સો રૂ. ને માલે વીમાખર્ચ ઠરાવ પ્રમાણે આપવાનું હોય છે તેમ આડત, કમીશન કે દ-

લાગી પણ સેાના માલ ઉપરજ આપવાની હેાય છે.

લેાન અને શેર.

અમુક મુદતે પાછા આપવાની સરતે અમુક વ્યાજે રૂપિઆ લેવા તે લેાન. તે મુદત પુરી થતા સુધી લેાનના રૂપીઆ પાછા મળતા નથી પણ માત્ર વ્યાજ મળેછે. એવી રીતે ઘણું કરીને રાજા કે મ્યુનિસિપાલીટી કરજ કરે છે. લેાનના રૂપીઆ મળતા નથી, પણ લેાન વેચી શકાય છે. કરજ કરનારની સ્થિતિ પ્રમાણે લેાનનેા ભાવ ઉપર કે અંદર હેાયછે, એટલે હલકી સ્થીતિ હેાય તેા સેાની લેાનનેા ભાવ સેાની અંદર અને સારી સ્થીતિ હેાય તેા સેા ઉપર ભાવ હેાય છે. જેટલેા ભાવ સેંકડે એાછેા હેાય તેટલું સેંકડે ડિસકૈાંટ કહેવાય છે, ને જેટલેા ભાવ સેંકડે વધારે હેાય તેટલું પ્રિમિઅમ કહેવાય છે.

કેાઇ મેાટું કામ કરવાને જ્યારે એક જણ માથે લેઈ શકતેા નથી ત્યારે તે કામમાં જેટલી રકમ જોઇએ, તેના સેા સેાના કે બસેં બસેં કે તેથી વધારે રકમના ભાગ કરીને તે રકમ ઘણા જણ વચે એકઠી કરેછે, એ દરેક ભાગને શેર કહે છે, ને શેર રાખનારા કે ખરીદનારાને ભાગીદાર કે શેરહેાલ્ડર કહેછે. દરેક શેર સેાની અંદરનેા, સેાનેા કે તેથી વધારે હેાય છે. તે શેરેા તે કામની જરૂરીઆતને ઊપજ ઉપર ગણતરી કરીને લેાકેા પેાતાના ગજા પ્રમાણે ખરીદ કરેછે. એ શેરના રૂપીઆ મળતા નથી પણ તે કામમાં નફેા થાય તેમાંથી શેર પ્રમાણે વેંહેચણી કે નફાનેા હિસ્સેા મળેછે. પણ લેાનની માફક શેર પણ બજારમાં વેચી શકાય છે ને તેના ભાવમાં પણ ડિસકૈાંટ કે પ્રિમિયમ હેાયછે. લેાન ને શેરની રીત આપણા દેશમાં નવી દાખલ થવાથી અને ગુજરાતના ઘણા ભાગના લેાકેા એ રીતથી અજાણ્યા હેાવાથી એ બંને રીતના હિસાબ સમજવા બહુ મુશ્કેલ જણાયછે.

જો ૧૪ ડિસકૈાંટ હેાય તેા સેાની લેાનનેા ભાવ ૮૬

જાણવો એટલે ૧૪ ટકા ડિસકૌંટે હજારની લોન લે તો ૮૬૦ રૂપીઆ રોકડા આપવા પડે. તેમજ ૧૦ ટકા પ્રિમિઅમે ૨૫૦ નો એક એવા શેર લે તો દરેક શેરના સેંકડે ૧૧૦ એટલે ૩૨૫૦ ના ૩૨૭૫ આપવા પડે, માટે એવા ચાર શેર લેતો રૂપીઆ ૧૧૦૦ રોકડા આપવા પડે. આ ઉપરથી માલુમ પડશે કે આવા હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાય.

તેમજ ૮૬ ને ભાવે ચાર ટકાની ૧૦૦૦ ની લોન લે તો ૩૮૬૦ આપવા પડે, પણ તેનું વ્યાજ લોન ચાર ટકાનીછે માટે ૧૦૦ ની લોનના અથવા ૮૬ રોકડા રૂપિઆના ચાર રૂપીઆ વ્યાજ આવે માટે ૧૦૦૦ ની લોનના અથવા ૮૬૦ રોકડા રૂપીઆના ૪૦ રૂપીઆ વ્યાજના આવશે.

લોનનું વ્યાજ-હિસાબ ગણવામાં દરવરસનું અને શેરનો નફો પણ દર વરસનો ગણાયછે. ઊપલાજ હિસાબમાં એમ કહ્યું હોય કે ૧૪ ટકા ડિસકૌંટે ૮૬૦ રૂપિઆ રોકડાની કેટલી લોન આવશે એટલે ૮૬ ને ભાવે ૧૦૦ ની લોન આવેછે એમ જાણવું તેથી ૮૬૦ રૂપીઆની ૧૦૦૦ની લોન આવે એ ત્રિરાશીથી માલમ પડશે.

પણ જો અમુક રકમ વ્યાજ ઊપજાવવાને કેટલી લોન લેવી અથવા કેટલા રોકડાની લોન લેવી એમ કહે તો—જેમકે ૪૦ રૂપીઆ દર વરસે વ્યાજ ઉપજાવવાને ૮૬ ને ભાવે ચાર ટકાની કેટલી લોન લેવી એટલે ૧૦૦ ની લોનનું ૪ ટકા વ્યાજ આવેછે, માટે ૪૦ વ્યાજ ઊપજાવવાને ૧૦૦૦ ની લોન લેવી, પણ ૮૬ નો ભાવ છે માટે ૧૦૦૦ ની લોનના ૩૮૬૦ રોકડા આપવા જોઇએ, ને ૪ ટકાની લોન છે માટે દર વરસે ૩૪૦) વ્યાજ આવવાનું.

અમુક જાતની લોનોની પેદાશ બરાબર બીજી જાતની લોનો લેવાને કેટલા રોકડા રૂપિઆ જોઇએ, એમ કહે તો ચાર ટકાની ૧૦૦૦ ની લોન જેટલું વ્યાજ આવવાને, પાંચ

ટકાની કેટલી લેાન લેવી એમ કહ્યું હેાય તેા ૪ ટકાની ૧૦૦૦ ની લેાનનું વ્યાજ ૩૪૦ આવે માટે ૫ ટકાની લેાનનું ૩૪૦ વ્યાજ ઉપજાવવાને ૮૦૦ ની લેાન લેવી જોઇએ, પણ એ બીજી જાતની લેાનેા લેવાને રેાકડા કેટલા જોઈએ એમ માગ્યુ હેાય તેા—જો એ લેાનનેા ભાવ ૧૧૦ હેાય તેા ૮૦૦) ની લેાનના ૩૮૮૦ રેાકડા આપવા જોઈએ.

જો ચાર ટકાની લેાન ૮૦ ને ભાવે લેતાં સેંકડે શું વ્યાજ પડશે એમ કહ્યું હેાય તેા ૮૦ રેાકડાનું વ્યાજ ચાર ટકા તેા સેા રેાકડાનું વ્યાજ પાંચ રૂપિઆ આવે. પણ ઘણી જાતની લેાનેામાંથી કઇ જાતની લેાનેા લેવાથી ફાયદેા થશે એમ કહાડવું હેાયતેા, બધી લેાનેાનું સેંકડે કેટલું વ્યાજ ઉપજશે તે કહાડી જેનું વધારે વ્યાજ આવે તે લેવાથી ફાયદેા જાણવેા.

એક જાતની લેાન વેચીને તેના જે ઉપજે તેની બીજી જાતની લેાન લેવી હેાય તેા પ્રથમની લેાનનું જે ઉપજે તેટલાની બીજી જાતની લેાન કેટલી આવશે તે કહાડવું. તેમજ તેનું શું વ્યાજ ઉપજશે તે કહાડવું હેાય તેા તે લેાનના દર પ્રમાણે તેટલી લેાનનું વ્યાજ કહાડવું. એ લેાનથી નફેા તેાટેા કહાડવેા હેાય તેા પહેલી લેાનનું જે વ્યાજ ઉપજતું તે ને બીજીવારની લેાનનું જે વ્યાજ ઉપજશે તે બેનેા મુકાબલેા કરવાથી માલમ પડશે. પણ જો અમુક દરની લેાન શા ભાવે લેવાથી સેંકડે અમુક વ્યાજ ઊપજે એમ કહ્યું હેાય તેા, એટલે ૪ ટકાની લેાન શા ભાવે લેવી કે સેા રૂપીએ પાંચ વ્યાજ પડે એમ કહ્યું હેાય તેા, ચાર ટકાની લેાન ૮૦ ને ભાવે લેવાથી સેા રૂપીઆનું વ્યાજ પાંચ રૂપીઆ ઉપજશે, કેમકે ૮૦ ને ભાવે૧૦૦રૂપિઆની લેાન ૧૨૫ની આવશે તેથી તેનું વ્યાજ ચાર ટકા લેખે પાંચ રૂપીઆ ઉપજશે. આ બધીરીતેાનાં પ્રમાણ ત્રીરાશી જેવાંજછે માટે તે માંડી બતાવ્યાં નથી—શેરના હિસાબ પણ લેાનના જેવાજછે, માટે તે વિષે જુદી રીત લખીનથી.

નફો તોટો.

કોઈ વેપારમાં મુડી અથવા મૂળ બેઠક કે ખરીદી કરતાં જેટલા વધારે ઉપજે તેટલો નફો ને જેટલા ઓછા ઉપજે તેટલો તોટો કહેવાય. નફો તોટો ખરીદી કે બેઠકના સેંકડા ઉપર ગણાય છે. જેમકે ૫૦૦ રૂપિઆના માલના ૬૦૦ ઉપજ્યા ત્યારે સેંકડે કેટલો નફો, તો ૫૦૦ ઉપર ૧૦૦ રૂપિઆ નફો થયો માટે સેંકડે ૨૦ રૂપિઆ નફો જાણવો. પણ બે રૂપિએ લીધેલો માલ અઢી રૂપિએ વેચે તો સેંકડે ૧૨૫ રૂપિઆ ઉપજે એટલે ૨૫ રૂપિઆ સેંકડે નફો થાય. પણ એમ કહે કે ૫ રૂપિએ લીધેલો માલ સેંકડે ૨૦) રૂપિઆ નફો મેળવવાને કેટલે વેચવો તો સોના(૧૨૦) ઉપજાવવા છે, માટે ૫ રૂપિઆના કેટલા રૂપિઆ ઉપજાવવા તો ૬ રૂપિઆ આવે. વળી ૬ રૂપિએ કોઇ માલ સેંકડે ૨૦ રૂપિઆ નફો લઈ વેચ્યો હોય તો તે કેટલે ખરીદ કરેલો એમ કહે તો ૧૦૦ રૂપિઆના ૧૨૦ ઉપજાવ્યા છે તો ૬ રૂપિઆ કેટલાના માલના ઉપજેલા તે કહાડવાથી ૫ રૂપિઆ આવશે. તેમજ ચાર રૂપિએ કોઇ માલ વેચ્યાથી સેંકડે ૨૦ ટકા ખોટ ગઈ તો બેઠક કેટલી. એમ કહાડવું હોય તો ૧૦૦ના માલના ૮૦ ઉપજે એ રીતે એ માલ ચાર રૂપિએ વેચ્યો છે, માટે તે માલ ૫ રૂપિએ લીધેલો જાણવો. વળી જો એમ કહેકે એક ઘોડો ૫૦ રૂપિએ વેચવાથી સેંકડે ૨૦ ટકા ખોટ જાય તો સેંકડે ૨૦ ટકા નફો લેવાને કેટલે વેચવો. એમ કહે તો જ્યારે ૨૦ ટકા ખોટ જાય છે, એટલે ૧૦૦ના ૮૦ ઉપજે છે ત્યારે તે ઘોડો ૬૨॥ રૂપિઆનો હોવો જોઇએ ને તે ઉપર સેંકડે ૨૦ ટકા નફો લેવો છે એટલે ૧૦૦ના ૧૨૦ ઉપજાવવા છે, માટે ૬૨॥ના ૭૫ ઉપજાવવા જોઈએ. આ ઉપરથી માલમ પડશે કે ઉપરના બધા હીસાબ ત્રીરાશીથી થશે.

પ્રમાણ ભાગ.

એક આપેલી સંખ્યાના બીજી આપેલી સંખ્યાઓની સાથે પ્રમાણમાં થાય એવા ભાગ કરવા તે પ્રમાણ ભાગ. આ ત્રીરાશી પ્રમાણ જેવુંજ છે. કેમકે ૪૦ રૂપિઆના ચાર ભાગ એવી રીતે કરવા કે તે ૨-૪-૬-૮ ની સાથે પ્રમાણમાં થાય. તો ૨, ૪, ૬, ૮ મળીને ૨૦ થાય છે, માટે ૨૦ રૂપિઆ હોય તો પહેલો ભાગ ૨, બીજો ૪, ત્રીજો ૬, ચોથો ૮ રૂપિઆનો થશે. તો ૪૦ રૂપિઆ છે. ત્યારે ત્રીરાશી રીતે કરવાથી ૨૦: ૪૦:: પહેલો ભાગ ૨ : ૪ પહેલો ભાગ.

એજ રીતે ૨૦:૪૦:: બીજો ભાગ ૪:૮ બીજો ભાગ

એ પ્રમાણે બાકીના ભાગ પણ આવશે, ઉપર પ્રમાણે કરવાનું કારણ એકે ૪૦ રૂપિઆના ૨૦ સરખા ભાગ કરીએ તો દરેક બબે રૂપિઆનો થાય, માટે તેવા બે ભાગ તે ૪, ચાર ભાગ ૮, છ ભાગ ૧૨ ને ૮ ભાગ ૧૬ રૂપિઆ થાય.

પંત્યાળું.

બે કે તેથી વધારે ભાગીદારોએ કરેલા સહીઆરાવેપારમાં થયેલો નફો અથવા તોટો વહેંચી લેવાની રીતને પંત્યાળું કહે છે. ભાગીદારોએ આપેલા રૂપિઆ સરખી મુદત સુધી રહ્યા હોય તો તેને એકવડું અને ભાગીદારોના રૂપિઆ ને મુદત વધતી ઓછી હોય તો તેને બેવડું પંત્યાળું કહે છે. એકવડા પંત્યાળાના હિસાબ પ્રમાણ ભાગનીરીતે ત્રીરાશીથી થાય છે. કેમકે તેમાં રૂપિઆના પ્રમાણમાં નફો વહેંચી લેવાનો હોય છે. અથવા સરખા રૂપિઆ દરેકે આપ્યા હોય ને મુદત જૂદી જૂદી હોય તો મુદતના પ્રમાણમાં નફો વહેંચી લેવાનો હોય છે, અએ ૪૦૦ને બએ ૬૦૦ રૂપિઆ આપી વેપાર કર્યો તેમાં ૧૦૦ રૂપિઆ નફો થાયતો એ નફો. કુલ ૧૦૦૦ રૂપિઆ ઉપર થયો તેમાં અ ના ૪૦૦ છે માટે ત્રીરાશી રીતે અના ૪૦ને બના ૬૦ રૂપિઆ

છે માટે ૬૦ રૂપિઆ નફો મળશે. તેજ પ્રમાણે અએ ને બએ ૧૦૦૦ રૂપિઆ સરખે ભાગે કાઢી વેપાર કર્યો તેમાં અના ૬ માસ ને બના ૧૨ માસ રૂપિઆ રહ્યા હોય ને ૧૮૦ રૂપિઆ નફો થયો હોયતો ૧૦૦૦ રૂપિઆ ૧૮ મહિના રહેવાથી ૧૮૦ નફો થયો ગણાય, માટે ૬ માસ વાળાને ત્રીરાશી રીતે ગણ્યાથી ૬૦ને બાર માસવાળાને ૧૨૦ રૂપિઆ નફાના આવશે,પણ બેવડા પંચાળાગાં રૂપિઆને મહિના જૂદા જૂદા હોવાથી રૂપિઆને મહિનાના પ્રમાણમાં નફો વહેંચવાનો હોય છે, જેમકે અના ૪૦૦ રૂપિઆ ૬ માસ ને બના ૮૦૦ રૂપિઆ ૪ માસ રહ્યા હોય ને ૫૬૦ રૂપિઆ નફો થયો હોય તો અના ૪૦૦×૬=૨૪૦૦ રૂપિઆ એક માસ અને બના ૮૦૦ ×૪=૩૨૦૦ રૂપિઆ એક માસ રહ્યા હોય તેવું થયું. માટે કુલ ૫૬૦૦ રૂપિઆ એક માસ રહ્યા ને તેમાં ૫૬૦ રૂપિઆ નફો થયો છે તેથી ૨૪૦૦ રૂપિઆ વાળાને પ્રમાણ રીતે ૨૪૦ ને ૩૨૦૦ રૂપિઆ વાળાને ૩૨૦ રૂપિઆ નફાના આવશે. ઉપરની રીતથી પંત્યાળાનું કારણ સમજાશે.

ઇષ્ટારાશિ.

ઇષ્ટરાશી બે પ્રકારની છે. એકવડી ને બેવડી.જેમાં એકવાર ખોટો જવાબ ધારીને હિસાબમાં કહેલા સંકેત પ્રમાણે કરી ખરો જવાબ કહાડવાનો હોય છે, તેને એકવડી ઇષ્ઠરાશિ કહે છે. એકવડી ઈષ્ટરાશિના દાખલામાં જવાબને કોઈ સંખ્યાએ ગુણવાનું અથવા ભાગવાનું કે તેનો કોઇ ભાગ વત્તો અથવા ઓછો કરવાનો હોય છે, એટલે કોઇ આપેલા ગુણોત્તરમાં જવાબ વધે અથવા ઘટે છે.

રીત–એક ખોટો જવાબ ધારી હિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે તેને ગુણવા અથવા ભાગવા ને તેથી જે ફળ આવેતેઃ હિસાબમાં સાચી સંખ્યાનું જે ફળ આપ્યું હોય તેઃઃ ધારેલી ખોટી સંખ્યાઃ જવાબ. આ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધી જ-

વાબ કાઢવો આ ઉપરથી માલમ પડશે કે એકવડી ઇષ્ટ-રાશીના દાખલા તે પ્રમાણ ભાગના દાખલાની રીતેજ થાય છે.

ઇષ્ટરાશિનું કારણ–પ્રમાણમાં પહેલું પદ બીજા પદ સાથે જે પ્રમાણમાં હોય તેજ પ્રમાણમાં ત્રીજું પદ, ચોથાપદ સાથે હોવું જોઇએ, તેમ ઇષ્ટરાશીમાં પણ ખોટીસંખ્યા જે પ્રમાણમાં જવાબની સાથે હોયછે તેજ પ્રમાણમાં ખોટી સંખ્યાનો કોઇ ભાગ, જવાબના તે ભાગની સાથે હોય છે. તેમજ ખોટી સંખ્યા ખરી સંખ્યા સાથે જે પ્રમાણમાં રહે છે તેજ પ્રમાણમાં તેમાં તેનો કોઈ ભાગ ઉમેરીએ અથવા બાદ કરીએ તે પણ રહે છે. જેમકે ખરી સંખ્યા ૧૬ હોય ને ખોટી સંખ્યા ૪ ધારી તો ૧૬ ને ૪ જે પ્રમાણમાં છે તેજ પ્રમાણમાં ૧૬ના ને ૪ ના બમણા કે બી જો ભાગ પણ રહેશે. તે નીચે પ્રમાણે.

ખો.સં.નાબમણા૮: ખ.સં.નાબમણા૩૨::૪ ખો. સં.:૧૬ જ.
" "નો બી.ભા.૨: " "નો બી.ભા.૮::૪ " ":૧૬ જ.

ખોટી સંખ્યાંમાં તેનો બીજો ભાગ ઉમેર્યાથી ૬ ને ખરી સંખ્યામાં તેનો બીજો ભાગ ઉમેર્યાથી ૨૪ થાય છે માટે—
૬ : ૨૪ :: ૪ખોટીસંખ્યા : ૧૬ જ. તેમજ ખોટી સંખ્યામાં થી તેનો બીજો ભાગ બાદ કર્યોતો ૨ ને ખરી સંખ્યામાંથી તેનો બીજો ભાગ બાદ કર્યો તો ૮ રહેછે માટે—૨ : ૮ ::૪: ૧૬.

બેવડી ઇષ્ટરાશિમાં બેવાર ખોટા જવાબ ધારીને સંકેત પ્રમાણે ગણવાનું હોય છે. તેની બે રીત છે.

૧ લી રીત–આ હિસાબમાં ખરી સંખ્યાને સંકેત પ્રમાણે ગણવાથી શું ફળ આવશે તે કહેલું હોય છે. માટેપ્રથમ એક સંખ્યા ધારી તે ઉપરથી સંકેત પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી હિસાબમાં ખરા જવાબનું જે ફળ આપ્યું હોય તે બેની બાદબાકી કરવી. જો ખરા જવાબના ફળ કરતાં ધારેલી સંખ્યાનું ફળ ઓછું હોય તો જેટલું ઓછું હોય ત્યાં આ-

ગળ ઓછાનું (–) ચિન્હ કરવું. ને વત્તું હોય તો (+) વત્તાનું ચિન્હ કરવું. એજ રીતે બીજીવાર બીજી સંખ્યા ધારી સંકેત પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી આપેલા ફળ સાથે સરખાવી વત્તા કે ઓછાનું ચિન્હ કરવું. પછી પહેલી ધારેલી સંખ્યાનો ને બીજી ધારેલી સંખ્યાના ફળની બાદબાકીનો ગુણાકાર કરવો. તથા બીજી ધારેલી સંખ્યાનો ને પેહેલી ધારેલી સંખ્યાના ફળનો ગુણાકાર કરવો. હવે જો ફળોની બાદબાકીનાં ચિન્હ સજાતિય હોય તો આ ગુણાકારોની બાદબાકી. ને વિજાતિય ચિન્હ હોય તો સરવાળો કરી તે સરવાળાને કે બાદબાકીને ફળોના સરવાળાએ કે બાદબાકીએ ભાગવાથી જવાબ આવશે.

કારણ–ઈષ્ટરાશિનું કારણ સમજવાને અંકગણિતના કેટલાક નિયમો કે પ્રત્યક્ષપ્રમાણો જાણવાં જોઇએ. એમાંના કેટલાક પાછળ આવી ગયા છે. તો પણ તે આ ઠેકાણે જરૂરના હોવાથી ફરીને લખ્યા છે.

૧ ખોટી ધારેલી સંખ્યા, ખરી સંખ્યા અથવા જવાબ કરતાં નાની હોય તો ખરી સંખ્યાનું જે ફળ આપ્યું હોય તે કરતાં ખોટી સંખ્યાનું ફળ ઓછું આવશે, ને તેથી ફળોની બાદબાકી આગળ ઓછાનું ચિન્હ કરવું પડશે. પણ જો ધારેલી સંખ્યા જવાબ કરતાં મોટી હશે તો ધારેલી સંખ્યાનું ફળ જવાબના ફળ કરતાં મોટું આવશે. તેથી બંને ફળોની બાદબાકી આગળ વત્તાનું ચિન્હ આવશે.

૨ પહેલી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી જેમ બીજી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે, તેમ પહેલી ફળોની બાદબાકી તે બીજી ફળોની બાદબાકીને છે. અથવા પેહેલી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી જેમ તે-

ના ફળની બાદબાકીને છે તેમ બીજી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી તે તેના ફળની બાદબાકીને છે.

૩ બંને ફળોની બાદબાકી સજાતિય હશે તો—એ બે ફળોની બાદબાકીની બાદબાકી જેમ ધારેલી બે સંખ્યાની બાદબાકીને છે, તેમ એમાંની એક બાદબાકી તે, તે બાદબાકી જે સંખ્યા ઉપરથી કહાડી હશે તે સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે. પણ જો ફળોની બાદબાકી વિજાતિય હશે તો —એ બે બાદબાકીનો સરવાળો જેમ ધારેલી બે સંખ્યાની બાદબાકીને છે તેમ એ બેમાંની એક બાદબાકી તે, તે બાદબાકી જે સંખ્યા ઉપરથી કહાડી હશે તે સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે.

૪ ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો પેહેલા ને બીજાનો ભાગાકાર તે, ત્રીજા ને ચોથાના ભાગાકારની બરોબર છે.

૫ બે બરાબરનાં પદોમાં બરાબર સંખ્યા ઉમેરીએ અથવા બાદ કરીએ તો તે સરવાળો અથવા બાદબાકી બરાબર રહેશે.

૬ બે અપૂર્ણાંક બરાબર હોય તો પહેલા અપૂર્ણાંકના અંશ જેમ બીજા અપૂર્ણાંકના અંશને છે, તેમ પેહેલાનો છેદ તે બીજાના છેદને છે.

આ બધા નિયમો તથા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો દાખલો લીધાથી તરત ધ્યાનમાં આવશે માટે એક દાખલો લઇએ. જેમકે તે સંખ્યા કયી છે કે જેમાંથી વીસ બાદ કરી ચારે ભાંગી ૩૦ ઉમેરીએ તો સરવાળો ૫૦ થાય છે. આ દાખલામાં જવાબ ૧૦૦ આવશે. હવે હિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે સંખ્યા ધારી ફળ ઉત્પન્ન કરવા પ્રથમ ૪૦ અને ફરી ૧૪૦ સંખ્યાઓ ધારી તો પહેલી ધારેલી સંખ્યા ઓછી છે માટે

૪૦	૧૪૦	(૧) ફૂળોની બાદબાકી ૧૫ ઓછી આવી અને બીજી ધારેલી સંખ્યા જવાબ કરતાં મોટી છે માટે ફૂળોની બાદબાકી ૧૦વત્તી આવી.
૨૦	૨૦	
૪)૨૦	૪)૧૨૦	
૫	૩૦	
૩૦	૩૦	
૩૫	૬૦	(૨) નીયમ પ્રમાણે પ્રમાણમાં માંડયું તો
૫૦	૫૦	૬૦:૪૦::૧૫:૧૦
−૧૫	+ ૧૦	અથવા બીજી રીતે માંડયું તો
		૬૦:૧૫::૪૦:૧૦

(૩) ત્રીજા નિયમમાં કહ્યા પ્રમાણે ફૂળોની બાદબાકી ને સજાતિય ચિન્હ લાવવાને પહેલી ૪૦ અને ૬૦ સંખ્યા ધારી તો ૪૦ ઉપરથી ફૂળોની બાદબાકી−૧૫ અને ૬૦ઉપરથી ફૂળોની બાદબાકી−૧૦ આવશે. તે ઉપરથી પ્રમાણમાંડયું તો ૫:૨૦::૧૫:૬૦

તેમજ ૪૦ ને ૧૪૦નાં ફૂળોની બાદબાકી વિજાતય છે માટે તે ઉપરથી પ્રમાણ માંડયું તો ...૨૫:૧૦૦::૧૫:૬૦

ટીકા—ઉપર માંડી બતાવેલાં બધાં પ્રમાણો ખરાં છે. કેમકે પ્રમાણમાં કહેલા નિયમ પ્રમાણે તેમાંના આદિનેઅંત પદોનો ગુણાકાર તે વચલાં બે પદોના ગુણાકારની બરોબર છે અને તેથી એ ત્રણે નિયમો ખરા છે એવું સમજાશે.

(૪) આ નિયમ સમજાવવાને ઉપરનું છેલ્લું પ્રમાણ ૨૫:૧૦૦::૧૫:૬૦ લીધું તો $\frac{૨૫}{૧૦૦}=\frac{૧૫}{૬૦}$ છે.

(૫) ઉપરના બે બરાબર પદમાં ચાર ઉમેરીશું તો $\frac{૨૫}{૧૦૦}+૪=\frac{૧૫}{૬૦}+૪$ અથવા $\frac{૪૨૫}{૧૦૦}=\frac{૨૫૫}{૬૦}$ એ પણ બરાબરછે. તેમજ બંનેમાંથી $\frac{૧}{૨}$ બાદ કર્યાથી પણ બાદબાકી બરાબર થશે.

(૬) $\frac{૨૫}{૧૦૦}=\frac{૧૫}{૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણમાં માંડીશું તો ૨૫:૧૫::૧૦૦:૬૦ આ પ્રમાણે થશે ને તે પ્રમાણ પણ ખરૂંજ છે.

ઉપરના નિયમો બરાબર ધ્યાનમાં રાખ્યાથી ઇષ્ટરાશીનું કારણ સમજાશે. માટે એક દાખલો રીત પ્રમાણે આ ઠેકાણે ગણી બતાવ્યો છે.

પ્રથમ ૪૦ ધાર્યા તો ૪૦ બીજીવાર ૧૪૦ ધાર્યા તો ૧૪૦

૨૦	૨૦
૪)૨૦	૪)૧૨૦
૫	૩૦
૩૦	૩૦
૩૫	૬૦
૫૦	૫૦
--૧૫	+૧૦

વિજાતિય ચિન્હ છે માટે

જવાબ $= \frac{૪૦\times૧૦+૧૪૦\times૧૫}{૧૫+૧૦} = \frac{૨૫૦૦}{૨૫} = ૧૦૦$

આ હિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી તેની ને આપેલા ફળની બાદબાકી ઉત્પન્ન કરી છે. હવે ૪૦ને ૧૦નો ને ૧૪૦ને ૧૫નો ગુણાકાર કરી તેના સરવાળાને ૧૦ ને ૧૫ના સરવાળાએ ભાગ્યાથી શા માટે જવાબ આવ્યો તેનું કારણ તપાસીએ.

પાછળ કહેલા ત્રીજા નિયમમાં કહ્યું છે કે 'ફળોની બાદબાકીનાં ચિન્હ વિજાતિય હોય તો તે બને બાદબાકીઓનો સરવાળો : બંને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને:: એમાંની એક બાદબાકી તેઃ તે બાદબાકી જે ધારેલી સંખ્યા ઊપરથી કહાડી છે તેનીનેજવાબની બાદબાકીને. એટલે આહિસાબમાં

૧૫+૧૦:૧૪૦-૪૦::૧૫: જવાબ-૪૦ આ પ્રમાણે પ્રમાણ થયું. તેથી આદિ અંતનો ગુણાકાર તે વચલાં બે મધ્યપદોના ગુણાકારની બરોબર છે માટેઃ—

(૧૫+૧૦) (જવાબ-૪૦)=(૧૪૦-૪૦)×૧૫ તેથી ૧૫

x(જવાબ–૪૦)+૧૦(જવાબ–૪૦)=૧૪૦x૧૫–૪૦x૧૫ તેથી ૧૫xજવાબ– ૧૫x૪૦+૧૦xજવાબ–૧૦x૪૦=૧૪૦x૧૫– ૪૦x૧૫ આ બંને બરાબર છે તેથી–૧૫x૪૦ બંને તરફથી કહાડી નાંખ્યા તેાઃ—

૧૫ x જવાબ +૧૦ x જવાબ–૧૦x૪૦=૧૪૦x૧૫ બરાબર રહ્યા. તેમાં ૧૦x૪૦ બંને તરફ ઉમેર્યા તેા ૧૫ x જવાબ + ૧૦ x જવાબ= ૧૪૦ x ૧૫+ ૧૦ x ૪૦ થયા કેમકે ડાબી બાજુમાં ૧૦ x ૪૦ ઓછા હતા ને એટલાજ વત્તા આવ્યા એટલે આવ્યા તેટલા ઓછા કરવાના હતા તેથી બરાબર થઇ રહ્યા ને જમણી બાજુમાં ૧૦x૪૦ વધ્યા. માટે ૧૫ x જવાબ + ૧૦ x જવાબ= ૨૫ જવાબ=૧૪૦x૧૫ +૪૦x૧૦ થયા તેથી બંને તરફ ૨૫એ ભાગ્યા તેા જવાબ $= \frac{૧૪૦x૧૫+૪૦x૧૦}{૨૫}$ આ ઉપરથી પ્રથમ કરેલી રીત કેમ થઇ તે સમજાશે.

સજાતિય ચિન્હ આવે માટે એજ દાખલેા ફરી કર્યેાતેાઃ—

પ્રથમ ૧૨૦	૧૪૦ બીજીવાર ધાર્યા	
૨૦	૨૦	
૪)૧૦૦	૪)૧૨૦	આ સજાતિય ચિન્હ છે
૨૫	૩૦	માટે રીત પ્રમાણે કર્યાતેા
૩૦	૩૦	જવાબ$=\frac{૧૨૦x૧૦-૧૪૦x૫}{૧૦-૫}$=૧૦૦
૫૫	૬૦	
૫૦	૫૦	
+૫	+૧૦	

આ રીતનું કારણ—ત્રીજા નિયમમાં કહ્યા પ્રમાણે ૧૦ –૫:૧૪૦–૧૨૦::૫:૧૨૦– જવાબને. તેથી આદિ અંતનેા ગુણાકાર વચલાં બે પદેાના ગુણાકારની બરાબર છે.

(૧૦–૫) (૧૨૦–જવાબ)=(૧૪૦–૧૨૦)x૫ અથવા

૧૦ (૧૨૦−જવાબ)−૫(૧૨૦−જવાબ)=૧૪૦×૫−૧૨૦×૫
અથવા ૧૦×૧૨૦−૧૦× જવાબ—૫×૧૨૦+૫× જવાબ= ૧૪૦×૫−૧૨૦×૫
બંને તરફથી−૫×૧૨૦ બાદ કર્યાં તો ૧૦×૧૨૦−૧૦× જવાબ+૫×જવાબ=૧૪૦×૫

અથવા ૧૦×૧૨૦−૧૦જવાબ+૫ જવાબ=૧૪૦×૫

અથવા ૧૦×૧૨૦−૫જવાબ=૧૪૦×૫

બંને તરફથી ૧૪૦×૫ બાદ કર્યા તો ૧૦×૧૨૦−૫ જવાબ−૧૪૦×૫=૦

બંને તરફ પાંચ જવાબ ઉમેર્યા તો ૧૦×૧૨૦−૧૪૦×૫=૫ જવાબ. બંને તરફ પાંચે ભાગ્યા તો $\frac{૧૦×૧૨૦−૧૪૦×૫}{૫}$= જવાબ. આ ઉપરથી ઉપરની રીતનું કારણ સમજાશે.

બીજી રીત.—બે વાર સંખ્યાઓ ધારી ઉપર પ્રમાણે ફળોની બાદબાકી કરવી. પછી બાદબાકીઓનાં ચિન્હ સજાતિય હોયતો બંને બાદબાકીઓની બાદબાકી : બંને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને :: એમાંની એક બાદબાકી : તે બાદબાકીવાળી ધારેલી સંખ્યા—જવાબને છે. આ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધી ગણવા. જે જવાબ આવશે તે ધારેલી સંખ્યાને જવાબની બાદબાકી આવશે, માટે ધારેલી સંખ્યામાંથી તે બાદ કર્યાથી જવાબ આવશે. જેમકે ઉપરનો દાખલો લીધો તોઃ—

૧૨૦	૧૪૦	ઉપરની રીતે પ્રમાણ
૨૦	૨૦	માંડ્યું તો૧૦−૫:૧૪૦−
૪)૧૦૦	૪)૧૨૦	૧૨૦::૫:૧૨૦−જવાબ.
૨૫	૩૦	તેથી બીજા ને ત્રીજા
૩૦	૩૦	પદના ગુણાકારને આદિ
૫૫	૬૦	પદે ભાગ્યા તો અંતપદ
૫૦	૫૦	આવશે એટલે:—
+૫	+૧૦	$\frac{(૧૪૦−૧૨૦)×૫}{૧૦−૫}$ = ૨૦

ચેાથું પદ આવ્યું. તે ૧૨૦−જવાબ છે માટે જવાબ=૧૨૦−૨૦=૧૦૦

ઉપરની બીજી રીતનું કારણ—બીજા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તેા ૧૦:૫::૧૪૦−જવાબ : ૧૨૦−જવાબ. આ પ્રમાણે પ્રમાણ થયું તેથી ચેાથા નિયમ પ્રમાણે $\frac{૧૦}{૫}=\frac{૧૪૦-\text{જવાબ.}}{૧૨૦-\text{જવાબ.}}$ બંને બરાબરની બાજુમાંથી ૧ બાદ કીધેા તેા $\frac{૧૦}{૫}-૧=\frac{૧૪૦-\text{જવાબ}}{૧૨૦-\text{જવાબ.}}-૧,$

સમચ્છેદ કર્યો તેા $\frac{૧૦-૫}{૫}=\frac{(૧૪૦-\text{જવાબ})-(૧૨૦-\text{જવાબ})}{૧૨૦-\text{જવાબ.}}$

અથવા $\frac{૧૦-૫}{૫}=\frac{૧૪૦-\text{જવાબ}-૧૨૦+\text{જવાબ}}{૧૨૦-\text{જવાબ.}}$

જમણી બાજુના અંશમાં એકવાર જવાબ ઓછેા ને એકવાર વત્તા છે માટે બંને ઉડી ગયાથી $\frac{૧૦-૫}{૫}=\frac{૧૪૦-૧૨૦}{૧૨૦-\text{જવાબ}}$ તેથી છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તેા: ૧૦−૫:૧૪૦−૧૨૦ ::૫:૧૨૦−જવાબ. રીતમાં કહેલું પ્રમાણ આ રીતે ઉત્પંન થયું છે.

જો વિજાતિય ચિન્હ હેાય તેા બંને બાદબાકીઓનેા સરવાળેા : બંને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને :: એમાંની એક બાદબાકી : બાદબાકી વાળી સંખ્યાને જવાબની બાદબાકીને છે. આ પ્રમાણે પ્રમાણ કરી ઉપરની રીત પ્રમાણે ગણી જવાબ કહાડવેા. એટલે પ્રથમનેા દાખલેા લઇ

૪૦	૧૪૦
૨૦	૨૦
૪)૨૦	૪)૧૨૦
૫	૩૦
૩૦	૩૦
૩૫	૬૦
૫૦	૫૦
−૧૫	+૧૦

પ્રમાણ બાંધ્યું તેા:— ૧૫+૧૦:૧૪૦-૪૦::૧૦:૧૪૦−જવાબ. બીજાને ત્રીજા પદના ગુણાકારને પેહેલા પદે ભાગ્યા તેા $\frac{(૧૪૦-૪૦)\times ૧૦}{૧૫+૧૦}$ =૧૪૦−જ. છે. માટે ૧૪૦−જવાબ=૪૦ આવ્યા.

તેથી ૧૪૦-૪૦=જવાબ. એટલે જવાબ=૧૦૦ આવ્યા.

ઉપરની રીતનું કારણ—બીજા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો ૧૫ : ૧૦ :: જવાબ-૪૦: ૧૪૦-જવાબ..

ચાળીસ જવાબ કરતાં ઓછા છે કેમકે ફળ ઓછું આવ્યું છે માટે જવાબમાંથી ૪૦ બાદ કર્યા. ને ૧૪૦ જવાબ કરતાં વધારેછે કેમકે ફળ મોટું આવ્યુંછે. માટે ૧૪૦માંથી જવાબ બાદ કર્યા.

ઉપરના પ્રમાણને ચોથા નિયમ પ્રમાણે લખ્યા તો

$$\frac{૧૫}{૧૦}=\frac{જવાબ—૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$$

બંને બરાબરના પદમાં એક ઉમેર્યોતો $\frac{૧૫}{૧૦}+૧=\frac{જવાબ-૪૦}{૧૪૦-જવાબ}+૧$

સમચ્છેદ કર્યો તો $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦}=\frac{જવાબ-૪૦+૧૪૦-જવાબ}{૧૪૦—જવાબ}$

જમણી તરફના અંશમાં એકવાર જવાબ વત્તા ને એકવાર ઓછો છે માટે બંને ઉડી ગયા. તેથી $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦}=\frac{-૪૦+૧૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$ રહ્યા. અથવા $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦}=\frac{૧૪૦-૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$ આવ્યા.

તે ઉપરથી છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો ૧૫+૧૦:૧૪૦-૪૦::૧૦:૧૪૦-જવાબ. રીતમાં કહેલું પ્રમાણ એ રીતે ઉત્પન્ન થયું છે.

ઘાત પ્રકરણ.

કોઇ સંખ્યા બે વાર મૂકીને તેનો ગુણાકાર કરીએતે ગુણાકારને તે સંખ્યાનો બે ઘાત કે વર્ગ કહેછે. કેમકે ૫ને પાંચે ગુણીએ તો ૨૫ આવે. તે પાંચનો બે ઘાત કે વર્ગ કહેવાય. પાંચનો વર્ગ બતાવવાને પાંચને માથે બે લખાય છે. જેમકે $૫^{૨}$. એ બગડાને ઘાત પ્રકાશક કે ઘાત બતાવનાર અંક કહેછે. એજ પ્રમાણે પાંચને ત્રણ વાર મૂકીને અથવા ત્રણ વાર ગુણીએ તેને પાંચનો ત્રણ ઘાત કે

ઘન કહે છે. જેમકે ૫×૫×૫=૧૨૫એ પાંચનો ઘન કહેવાય. પાંચનો ઘન બતાવવાને $૫^{૩}$ પણ લખાય. એજ પ્રમાણે ચતુર્ઘાત પંચઘાતને માટે પણ જાણવું.

એકનો કોઇ પણ ઘાત એકજ આવે છે. કેમકે એકને ગમે તેટલી વાર એકે ગુણીએ તો ગુણાકાર એકજ રહે છે. પણ અપૂર્ણાંકનો જેમ જેમ ઘાત વધારતા જઇએ તેમ તેમ કીમત ઘટતી જાય છે, કેમકે કોઈ અપૂર્ણાંકનેતેજ રકમે ગુણવાથી તેનો ગુણાકાર તેટલા ગણો ઓછોઆવેછે.

કોઇ સંખ્યાનો ચતુર્ઘાત કરવો હોય તો તેસંખ્યાને ચાર વાર ગુણવી અથવા વર્ગ કરી તેને વર્ગે ફરીને ગુણવી, જેમકે $૫^{૪}$=૫×૫×૫×૫=૬૨૫ અથવા $૫^{૪}$=૫×૫=૨૫×૨૫=૬૨૫ એટલે ચતુર્ઘાત કરવો હોય તો બે ઘાતને બે ઘાતે ગુણવા, પંચઘાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને પાંચવાર ગુણવીઅથવા ઘનને વર્ગનો ગુણાકાર કરવો, જેમકે $૨^{૫}$=૨×૨×૨×૨×૨=૩૨ અથવા $૨^{૩}$=૮તે$૨^{૨}$=૪ એ બેનો ગુણાકાર ૮×૪=૩૨, એટલે પંચઘાત કરવો હોયતો ત્રણ ઘાતને બે ઘાતનો ગુણાકાર કરવો. તેમજ કોઇ સંખ્યાનો છ ઘાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને છ વાર ગુણવી અથવા ત્રણ ઘાતને ત્રણ ઘાતે ગુણવા અથવા ચાર ઘાતને બે ઘાતે ગુણવા.

આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઇ સંખ્યાના કોઇ ઘાતનો ને તેજ સંખ્યાના બીજા કોઇ ઘાતનો ગુણાકાર કરીએ તે ગુણાકાર એ ઘાતોના સરવાળા જેટલો ઘાત થાય, જેમકે $૪^{૫}$×$૪^{૩}$ એ બેનો ગુણકાર $૪^{૮}$ થાય. તેમજ $૪^{૨}$×$૪^{૩}$ =$૪^{૫}$ આવે. ઇત્યાદિ.

કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ કરવો હોય તો પાંચ રીતે થાયછે.

(૧) તે સંખ્યાને તેજ સંખ્યાએ ગુણવાથી. જેમકે$૫^{૨}$=૫×૫=૨૫

(૨) તે સંખ્યાના બે કે વધારે ભાગ કરી તે દરેક ભાગે આખી સંખ્યા સાથે ગુણી તે ગુણાકારોનો સરવાળો

કરવાથી. જેમકે ૧૨^{૨} કરવા હેાય તેા તેના ૧૦ને ૨ એવા બે ભાગ કર્યા, તેા ૧૨^{૨} = ૧૦×૧૨+૨×૧૨=૧૪૪

(૩) તે સંખ્યાના બે ભાગ કરી તે દરેક ભાગના વર્ગોના સરવાળામાં તે બે ભાગેાના ગુણાકારની બમણાઇ ઉમેરવાથી. જેમકે ૧૮^{૨}=૧૦^{૨}+૮^{૨}+૧૦×૮×૨=૩૨૪

(૪) તે સંખ્યાના અર્ધના વર્ગની ચેાગણાઈ બરાબર અથવા તેના ચેાથા ભાગના વર્ગની ૧૬ ગણાઈ બરાબર. જેમકે ૮^{૨}=૪^{૨}×૪ અથવા ૨^{૨}×૧૬=૬૪

(૫) કેાઇ મેાટી સંખ્યાનેા વર્ગ કરવેા હેાયતેાઃ— તે સંખ્યા લખ્યા પછી તેની નીચે લેાટી દેારી એક આડી હારમાં દરેક આંકડાનેા વર્ગ લખવેા. જે અંકનેા વર્ગ એક અંક થાય તેની ડાબી બાજુએ મીડું મૂકી બે અંક પૂરા કરવા. મતલબકે જેટલા અંકનેા વર્ગ કરવેા હેાય તેથી બમણા અંક થવા જેાઇએ. જે સંખ્યામાં મીડું હેાય તેા તેના વર્ગના સ્થાને બે મીડાં લખવાં. પછી સંખ્યામાંના મેાટા એટલે ડાબા હાથ ભણીના અંકની બમણાઈએ બાકીના આંકડા સાથે ગુણી તે ગુણાકાર ઉપલા વર્ગ કરેલા આંકડાએાની નીચે, જેટલા આંકડા સાથે ગુણ્યા હેાય તેટલા આંકડા જમણા હાથ તરફના કાપીને લખવેા. પછી તેની પાસેના જમણા હાથ ભણીના આંકડાની બમણાઈએ બાકીના જમણા હાથ ભણીના આંકડા સાથે ગુણી જેટલા આંકડા સાથે ગુણ્યા હેાય તેટલા આંકડા કાપી ઉપર પ્રમાણે મૂકવેા. પછી તેની પાસેનેા જમણા હાથ ભણીનેા આંકડેા લઇ બાકીના જમણાહાથ ભણીના આંકડા સાથે ગુણી, ઉપર પ્રમાણે મૂકવેા. એ પ્રમાણે દશકના આંકડાની બમણાઇએ એકમ સાથે ગુણી તે ગુણાકાર દશક નીચે મૂકવેા. એકમની બમણાઇએ કેાઇ આંકડા સાથે ગુણવાના નથી, માટે ન ગુણવા. પછી સરવાળેા કરવેા. એ જવાબ. જેમકે ૧૦૨૩૪૫નેા વર્ગ કરવેા હેાયતેાઃ—

૧૦૨૩૪૫	તેમજ ૧૨૫નો વર્ગ કરવો હોય તો ૧૨૫
૧૦૦૦૪૦૯૧૦૨૫	૧૦૪૨૫
૪૬૯૦	૫૦
૧૩૮૦	૨૦
૨૭૦	૧૫૬૨૫ જ૰
૪૦	
૧૦૪૭૪૪૯૯૦૨૫ જવાબ.	

કારણ—કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ તે, તેના દરેક ભાગના વર્ગ વત્તા તે બે ભાગોના ગુણાકારના બમણાઇ બરાબર છે. ૧૨૫નો વર્ગ કરવો હોય તો ૧૦૦+૨૦+૫ એ ત્રણ ભાગ છે, ને દરેક ભાગનો વર્ગ કરી સરવાળો લેઇશું તો ૧૦૦૦૦+૪૦૦+૨૫=૧૦૪૨૫ આવશે. એટલે જે આંકડાનો વર્ગ એક અંક આવે છે તેની પાછળ મીંડું આવે છે. આ દાખલામાં બેનો વર્ગ ચાર એક અંક આવ્યો તો તેની પાછળ મીંડું આવ્યું. અને તેથીજ ઉપરનો નિયમ કહાડ્યો કે જેનો વર્ગ એક અંક આવે તેની પાછળ મીંડું મુકવું. હવે તે ભાગોના ગુણાકારની બમણાઇ ઉમેરવી જોઈએ એટલે સોનો વીશ ને પાંચ સાથે ને વીશનો પાંચ સાથે એમ અરસપરસ ગુણાકાર કરી તેની બમણાઇ ઉમેરવી જોઈએ, તેથી સોની બમણાઇ બસેંએ પાંચ સાથે ને વીશ સાથે ગુણ્યા એટલે પાંચ હજાર આવ્યા. પણ સંખ્યા લખવામાં સો ઉપર બે મીંડાં આવતાં નથી માટે બે અંક કાપીને ગુણાકાર લખ્યો એટલે એકસોની બમણાઇ બેને પચીસનો ગુણાકાર પચાસ બે અંક કાપીને લખ્યો, તેમજ વીશની બમણાઈનો ને પાંચનો ગુણાકાર બસેં આવ્યો પણ વીશમાં મીંડું લખાતું નથી, તેથી બે દશકની બમણાઇ ચારનો ને પાંચનો ગુણાકાર વીશ એક અંક કાપીને લખ્યો છે. એમાં બધા અંકોનો અરસપરસ ગુણાકાર આવી ગયો. માટે પાંચની બમણાઈએ કોઈ અંક સાથે ગુણ્યા નથી. એ ઉપરથી

ઉપરનેા નિયમ નીકળ્યેા છે.

(૧) કોઈ સંખ્યાનેા ઘન કરવેા હેાય તેા તે સંખ્યાને ત્રણવાર ગુણવી.

(૨) અથવા તે સંખ્યાના બે ભાગ કરી તે ભાગેાના ઘનના સરવાળામાં તે ભાગેાના ગુણાકારની ત્રમણાઇને આખી સંખ્યાએ ગુણી ઉમેરવા.

(૩) અથવા તે સંખ્યાના બંને ભાગેાના ઘનમાં પહેલા ભાગના વર્ગની ત્રમણાઈએબીજા ભાગનેઅને બીજાભાગના વર્ગની ત્રમણાઈ એ પહેલા ભાગને ગુણી, એ બંને ગુણાકાર ઉમેરવા.

(૪) પણ જો કાંઇ સંખ્યાના ત્રણ અંક હેાયને તેનેા ઘન કરવેા હેાય તેાપણ તેના બે ભાગ પાડવા એટલે એક ભાગમાં બે અંકને એક ભાગમાં એક અંક રાખી પછી ઉપરની ત્રીજી રીતે ઘન કરવેા.

(૫) અથવા જો ત્રણે અંક રાખી ઘન કરવેા હેાય તેા દરેક અંકના ઘનમાં તે દરેક અંકના વર્ગની ત્રમણાઇએ બાકીના અંક સાથે ગુણી તે ગુણાકાર અને તે ત્રણે અંકેાના ગુણાકારની છગણાઇ એટલું ઉમેરવું. જેમકે

$૧૨૪=૧૨૦+૪$ એ બે ભાગ લીધાતેા ઉપરની ચેાથી રીત પ્રમાણે $૧૨૦^{૩}+૪^{૩}+૧૨૦^{૨}×૩×૪+૪^{૨}×૩×૧૨૦=૧૯૦૬૬૨૪$ અથવા જો ત્રણે અંક રાખી ઘન કરવેા હેાયતેા $૧૨૪^{૩}=૧૦૦^{૩}+૨૦^{૩}+૪^{૩}+૧૦૦^{૨}×૩×૨૪+૨૦^{૨}×૩×૧૦૪+૪^{૨}×૩×૧૨૦+૧૦૦×૨૦×૪×૬=૧૯૦૬૬૨૪$ આવશે.

કેાઇ સંખ્યા કયાં સંખ્યાનેા કેાઇ ઘાત થએલેા છે, તે મૂળ સંખ્યાને તે ઘાત સંખ્યાનું મૂળ કહે છે. જેમકે ૩૬ એ છનેા વર્ગ છે, માટે ૩૬નું છ એ બે ઘાત મૂળ કહેવાય. બે ઘાત મૂળને વર્ગ પણ કહે છે. તેમજ ૬૪ એ ચારનેા ઘન છે. માટે ૬૪નેા ૪ એ ત્રણ ઘાત મૂળ કે ઘનમૂળ કહેવાય.

કોઇ સખ્યાનું ઘાતમૂળ બતાવવાને $\sqrt{}$ ચિન્હ કરે છે. ને તેમાં તે ઘાતનો અંક લખેછે. જેમકે ૬૪ નું ત્રણ ઘાતમૂળ બતાવવું હોય, તો $\sqrt[૩]{૬૪}$ આ પ્રમાણે, ને ચતુર્ધાતમૂળ બતાવવું હોય, તો $\sqrt[૪]{૬૪}$ લખાય. પણ વર્ગમૂળ બતાવવાને અંદર બે નહીં લખતાં માત્ર ચિન્હજ લખે છે. જેમકે ૩૬ નું બે ઘાતમૂળ બતાવવું હોય તો $\sqrt{૩૬}$ લખાય. ઘાતમૂળ બતાવવાની બીજી રીત પણછે, એટલે તે સંખ્યાને માથે ઘાતમૂળનો અંક એકના છેદમાં લખાયછે. જેમકે ૬૪ નું ત્રણ ઘાતમૂળ $૬૪^{\frac{૧}{૩}}$ અને ૬૪ નું ચતુર્ધાતમૂળ $૬૪^{\frac{૧}{૪}}$, ૩૬નું વર્ગમૂળ $૩૬^{\frac{૧}{૨}}$ આ પ્રમાણે લખાય છે. પણ કોઈ સંખ્યાના કોઇ ઘાતનું કોઈ ઘાતમૂળ બતાવવું હોય, ત્યારે તે ઘાતનો અંક અંશમાં ને ઘાતમૂળનો અંક છેદમાં લખી તે અપૂર્ણાક તે સંખ્યાને માથે લખાયછે. જેમકે ૮ ના વર્ગનું ત્રણ ઘાતમૂળ બતાવવું હોય, તો $૮^{\frac{૨}{૩}}$ લખાય. અથવા ચિન્હ કરીને અંદર $\frac{૨}{૩}$ લખે, જેમકે $\sqrt[\frac{૨}{૩}]{૮}$ લખાય. ૧૨ ના ત્રણ ધાતનું ચતુર્ધાતમૂળ $૧૨^{\frac{૩}{૪}}$ અથવા $\sqrt[\frac{૩}{૪}]{૧૨}$ આ પ્રમાણે બેરીતે લખાયછે. આઠનો વર્ગ ૬૪ માટે ૬૪ એ ઘાત સંખ્યા ને ૮ એ મૂળ સંખ્યા. પણ જેનું મૂળ નીકળતું નથી એટલે જે સંખ્યા કોઇ સંખ્યાનો ઘાત નથી, તે સંખ્યાને કરણી રૂપ સંખ્યા કહેછે. જેમકે ૨, ૫, ૬, ૭ ઈ૦

કોઇ સંખ્યાનું મૂળ તે સંખ્યા કરતાં ઓછું આવે, પણ એકનું કયું પણ મૂળ એકજ આવે. અપૂર્ણાંકનું મૂળ-ઘાત ગણું વધારે આવે. જેમકે $\frac{૧}{૪}$ નું વર્ગમૂળ $\frac{૧}{૨}$, $\frac{૧}{૨૭}$ નું ઘનમૂળ $\frac{૧}{૩}$, $\frac{૪}{૯}$ નું વર્ગમૂળ $\frac{૨}{૩}$ ઈ૦

વર્ગમૂળમાં ચિન્હ મૂકવાનું કારણ–કોઇ સંખ્યાના

વર્ગમાં વધારેમાં વધારે તે સંખ્યાના બમણા કરતાં વધારે અંકો આવશે નહીં. ને ઓછામાં ઓછા બમણા કરતાં એક ઓછો, એથી ઓછા અંક આવશે નહીં. એટલે એક અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે બે, ને ઓછામાં ઓછા એક અંક આવશે. બે અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે ચાર, ને ઓછામાં ઓછા ત્રણ અંક આવશે. પાંચ અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે ૧૦ ને ઓછામાં ઓછા નવ અંક આવશે. જેમકે ઓછામાં ઓછી એક અંકની સંખ્યા ૧ અને વધતામાં વધતી ૯ છે. તેનો વર્ગ ૧ અને ૮૧ આવશે. બે અંકની ઓછામાં ઓછી ૧૦ અને વધતામાં વધતી ૯૯ છે, તેનો વર્ગ ૧૦૦ અને ૯૮૦૧ આવશે. એ ઉપરથી સમજાયછે કે કોઇ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો તે સંખ્યામાં એક કે બે અંક હશે, તો તેનું વર્ગમૂળ એક અંક, ત્રણ કે ચાર અંક હશે તો બે અંક, પાંચ કે છ અંક હશે તો ત્રણ અંક આવશે. ૫૬૨૧૮ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો તેમાં ત્રણ આવશે. કેમકે ચાર અંક સુધીમાં તો બે અંક આવે, પણ પાંચ અંક છે, તેથી ત્રણ અંક આવશે, એટલે ૧૮ નું એક અંક, ૬૨૧૮ નું બે અંક ને ૫૬૨૧૮ નું ત્રણ અંક આવ્યું, તે ઊપરથી એ પાંચ અંકોના ત્રણ ભાગ પાડ્યા. ૫,૬૨,૧૮ તેમના ઉપર નિશાની કરી, તો તરત માલમ પડશે. જેમકે ૫૬૨૧૮ મૂળમાં ત્રણ અંક આવશે. તેમાં પહેલો સોનો, બીજો દશકનો, ને ત્રીજો એકમનો આવશે. એટલે દશ હજારના સ્થાન ૫ માંથી સોનો અંક નીકળશે, ને બાકીના બેમાંથી દશક ને એકમ નીકળશે. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળેછે, કે જે સંખ્યાનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તે સંખ્યાના એકમ અથવા પહેલા અંક ઉપર, ત્રીજા અંક ઉપર, પાંચમા અંક ઉપર એમ ચિન્હ કરવાં.

વર્ગમૂળની રીતનું કારણ—કોઇ સંખ્યાના વર્ગમૂળમાં બે

કરતાં વધારે અંક હોય, તો તે સંખ્યા, તે અંકોના વર્ગોના સરવાળામાં ડાબા હાથ ભણીથી દરેક અંકની બમણાઈને તેની પછીના અંકોના સરવાળાનો ગુણાકાર ઉમેરીએ, તેની બરોબર હોવી જોઇએ. આનું કારણ વર્ગ કરવાની પાંચમી રીત ઉપરથી સમજાશે.

જેમકે-૬૧૩૦૮૯ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો-

૬૧૩૦૮૯ (૭૦૦+૮૦+૩=૭૮૩.

૭૦૦^{2}=૪૯૦૦૦૦

૧૨૩૦૮૯

(૧૪૦૦+૮૦)૮૦=૧૧૮૪૦૦=૨×૭૦૦×૮૦+૮૦^{2}.

૪૬૮૯

(૧૫૬૦+૩)૩=૪૬૮૯=૨×૩×(૭૦૦+૮૦)+૩^{2}.

૦૦૦૦

ઉપર કહ્યા પ્રમાણે ઉપલી સંખ્યા ઉપર ચિન્હ મૂક્યાથી માલમ પડેછે કે તેના વર્ગમૂળમાં ત્રણ અંક આવશે એટલે પહેલો અંક સોનો આવશે. માટે એ આખી સંખ્યામાંથી પાંચમા ને છઠ્ઠા અંક ૬૧ માં સોનો કયો અંક સમાશે, તે જોઇએ. ૬૧ નું વર્ગમૂળ ૪૯ ના વર્ગમૂળ કરતાં વધારે, અને ૬૪ કરતાં ઓછુંછે. માટે ૬૧૦૦૦૦ માં ૭૦૦ કરતાં વધારે ને ૮૦૦ કરતાં ઓછાનો વર્ગ સમાશે, માટે ૭૦૦ એ પહેલો અંક આવશે. તેથી ૭૦૦ નો વર્ગ બાદ કર્યાથી ૧૨૩૦૮૯ વધ્યા. એમાં કેટલા દશક સમાશે, તે ખોળી કહાડવુંછે. તે દશક ગમે તે હોય, પણ ૧૨૩૦૮૯ માં તે દશકનો વર્ગ અને ૭ સોના બમણાનો ને તે દશકનો ગુણાકાર સમાવો જોઇએ, એટલે ૨×૭૦૦×તે દશક+તે દશકનો વર્ગ અથવા (૨×૭૦૦+દશક) દશક સમાવા જોઈએ. હવે કયો દશક છે, તે જાણવા માટે ૨×૭૦૦=૧૪૦૦ ને એક

દશકે ગુણ્યા તેા ૧૪૦૦૦ થયા, તે ૧૨૩૦૮૯ માં ૮ વાર સમાશે એમ જણાયછે, માટે આઠ દશક આવશે, એમ સમજાયછે.તેથી ૧૪૦૦+૮૦ને ૮૦ એ ગુણી બાદ કર્યા તેા ૪૬૮૯ બાકી રહેછે તે ઊપરથી ત્રીજો અંક એકમનેા કહાડવાનેાછે. તે એકમ ગમે તે હેાય, પણ તેનેા વર્ગ અને પાછલા બંને અંકોની બમણાઈનેા, ને એકમનેા ગુણાકાર ૪૬૮૯ માં સમાવેા જોઇએ. એટલે ૨(૭૦૦+૮૦×તે રકમ)+એકમનેા વર્ગ અથવા ૭૮૦×૨=૧૫૬૦+એકમ×એકમ સમાવા જોઈએ. પણ ૪૬૮૯ ને ૧૫૬૦ ભાગી જોતાં ત્રણ આવે છે. માટે ત્રણ એકમ આવવા જોઈએ, તેથી $૨×૭૮૦×૩+૩^{૨}$ =૪૬૮૯ આવા રહેશે. માટે ૭ સેા ૮ દશક ને ૩ એકમ =૭૮૩ જવાબ.

ઉપર વર્ગમૂળ ગણી બતાવ્યું છે તે ઉપરથી વર્ગમૂળ ની રીત શી રીતે ઊત્પંન થઈ તે નીચે મુજબ.

૧૪૧૩૭૬નું વર્ગમૂળ કહાડવું હેાયતેા—

)૧૪૧૩૭૬(૩૦૦+૭૦+૬=૩૭૬ જવાબ.

$૩૦૦^{૨}$= ૯૦૦૦૦

૫૧૩૭૬

૬૭૦×૭૦= ૪૬૯૦૦ $=(૨×૩૦૦×૭૦)+૭૦^{૨}$

૪૪૭૬

૭૪૬×૬= ૪૪૭૬ $=૨×(૩૦૦+૭૦)×૬+૬^{૨}$

૦૦૦૦

આ ઉપરથી નીચેની રીત થઇ છે.

૩)૧૪૧૩૭૬(૩૭૬

+૩ ૯

૬૭) ૫૧૩(૭

+૭ ૪૬૯

૭૪૬) ૪૪૭૬(૬

૪૪૭૬

૦૦૦૦

છેલી રીત એ વર્ગમૂળ કહાડવાની રીત છે, તેનું કા-રણ ઉપર લખેલી રીત ઉપરથી સમજાશે.

જ્યારે વર્ગમૂળ કહાડતાં છેવટ ન આવે ને કોઈ સં-ખ્યા વધેતો વર્ગમૂળમાં જેટલાં દશાંશ સ્થળ લાવવાં હોય તેથી બમણાં તે સંખ્યા ઉપર દશાંશ સ્થળમાં મીડાં ચઢા-વવાં. જેમકે ૭નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોયતો નીચે પ્રમાણેકરવું.

```
     ૨ )૭.૦૦૦૦૦૦ (૨.૬૪૫
     ૨  ૪
    ----------
    ૪૬  ૩૦૦ (૬
     ૬  ૨૭૬
    ----------
   ૫૨૪ )૨૪૦૦(૪   આમાં દશાંશસ્થળ ૩ લાવ્યાછીએ
     ૪  ૨૦૯૬       માટે ત્રણ સ્થળ કાપી દશાંશ ચિન્હ
  -----------
  ૫૨૮૫ )૩૦૪૦૦(૫  કર્યુંએટલે ૨.૬૪૫ જવાબ.
        ૨૬૪૨૫
        ------
         ૩૯૭૫
```

કોઇ અપૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો અંશનું વર્ગમૂળ અંશ સ્થળે અને છેદનું વર્ગમૂળ છેદ સ્થળે લખ-વું એ જવાબ. જેમકે $\frac{૪}{૯}$ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો ૪ નું વર્ગમૂળ ૨ અંશ, અને ૯ નું વર્ગમૂળ ૩ છેદ, એટલે $\frac{૨}{૩}$ આવશે. $\frac{૪}{૯}$ નું વર્ગમૂળ લખવું હોય તો $\sqrt{\frac{૪}{૯}}$ અથવા $\frac{\sqrt{૪}}{\sqrt{૯}}$ લખાય. જેના અંશને છેદનું વર્ગમૂળ જતું ન હોય, તેના અંશને અને છેદને છેદે અથવા અંશે ગુણીશું, તો પા-છળ કહી ગયા, તે પ્રમાણે કીમતમાં ફેર પડશે નહીં. ને જો છેદે ગુણીશું, તો છેદનું વર્ગમૂળ ને અંશે ગુણીશું તો અંશનું વર્ગમૂળ જશે, એટલે અંશને છેદમાંથી એકજ મદ માત્ર વર્ગમૂળમાં રહેશે. તેનું વર્ગમૂળ ઉપર કહ્યા પ્રમાણે ક-હાડયાથી નીકળશે. જેમકે $\frac{૩}{૭}$ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો

$\frac{૩}{૭}\times૩=\frac{૯}{૨૧}$ તેનું વર્ગમૂળ $\frac{૩}{\sqrt{૨૧}}$ જ. અથવા $\frac{૩}{૭}\times૭=\frac{૨૧}{૪૯}$ નું વર્ગમૂળ $\frac{\sqrt{૨૧}}{૭}$ આવશે. પછી ૨૧ નું વર્ગમૂળ કાહાડયાથી જવાબ નીકળશે.

દશાંશનું વર્ગમૂળ કહાડવાની રીત ને ચિન્હ મૂકવાની રીતનું કારણ–દશાંશમાં જેટલાં સ્થળહોય, તે પ્રમાણે તેને વ્યવહારીમાં મૂકી છેદ મૂકવા.પછી તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું. જેમકે $\sqrt{૪૦.૯૬}=\frac{\sqrt{૪૦૯૬}}{\sqrt{૧૦૦}}=\frac{૬૪}{૧૦}=૬.૪$ અથવા $\sqrt{.૪૦૯૬}=\frac{\sqrt{૪૦૯૬}}{\sqrt{૧૦૦૦૦}}=\frac{૬૪}{૧૦૦}=.૬૪$ આ ઉપરથી માલમ પડેછે કે દશાંશમાં બે "થળ હશે, તેા તેનું વર્ગમૂળ એક અને ચાર સ્થળ હશે, તેા બે અંક આવશે માટે દશાંશનું વર્ગમૂળ કહાડવું હેાય, તેા પ્રથમ શતાંશ ઉપર, પછી દશ સહસ્રાંશ ઉપર એમ બીજા બીજા અંક ઉપર ચિન્હ કરવું. જેટલાં ચિન્હ થશે, તેટલાં દશાંશ સ્થળ વર્ગમૂળમાં આવશે. દશાંશ સાથે પૂર્ણાંક હેાય, તેા બંનેનું ભેગું વર્ગમૂળ દશાંશ ન હેાય, એ રીતે કહાડી પછી જેટલાં દશાંશ સ્થળ ઉપર ચિન્હ હેાય, તેટલા અંક જમણી તરફથી કાપીને દશાંશ ચિન્હ કરવું. જો દશાંશ અંકની સંખ્યા એકી હેાય, તેા તે ઉપર જમણી તરફ એક શૂન્ય મૂકી બેકી અંક કરવા, કેમકે દશાંશમાં જમણી તરફ શુન્ય મૂક્યાથી કીમતમાં ફેર પડતેા નથી એવું આપણે પાછળ સમજાવી ગયા છીએ.

ઘનમૂળ.

કેાઇ સંખ્યા કયી સંખ્યાનેા ઘન છે એ મૂળ સંખ્યાને તે સંખ્યાનું ઘનમૂળ કહે છે. ૨૭ એ ત્રણનેા ઘન છે માટે ૩એ ૨૭નું ઘનમૂળ. કેાઇ સંખ્યાનું ઘનમૂળ બે અંક એટલે એકમ ને દશક હેાયતેા તે સંખ્યામાં દશકનેા ઘન +

દશકના વર્ગના ત્રમણા ને એકમનો ગુણાકાર+એકમના વર્ગના ત્રમણા ને દશકનો ગુણાકાર+એકમનો ઘન એટલું સમાવું જોઇએ. જેમકે ૧૭૫૬૧૬ એ ૫૬નો ઘન છે માટે એમાં ૫૦^3+૫૦^2×૩×૬+૫૦×૩×૬^2+૬^3 એટલું સમાય છે.

ઘનમુળમાં ચિન્હ મુકવાની રીતનું કારણ— ૧૦નો ઘન ૧૦૦૦ છે માટે જેટલા દશકનો ઘન કરીશું તે, તે દશકના અંકના ઘનને ૧૦૦૦ ગુણ્યા જેટલો થશે. જેમકે ૪૦^3=૪^3×૧૦^3 અથવા ૪^3 ×૧૦૦૦ = ૬૪૦૦૦નું ઘનમૂળ કહાડવું હોયતો છેલ્લા ત્રણ અંક કાપતાં જેટલા હજાર વધે તેનું ઘનમૂળ કહાડી તેને દશે ગુણ્યા એટલે ચાલશે. તેથી ૬૪નું ઘનમૂળ ચાર એ દશક આવ્યા માટે ૪×૧૦=૪૦ એ ૬૪૦૦૦નું ઘનમૂળ. છેલ્લા ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ એકમ આવશે, ને તે પેહેલાંના ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ દશક આવશે. તેજ પ્રમાણે ૧૦૦નો ઘન ૧૦૦૦૦૦૦ છેમાટે જેટલા શતકનો ઘન કરીશું તે, તે શતકના અંકના ઘનનેદશ લાખે ગુણ્યા જેટલા આવશે. તેથી છેલ્લા છ અંક કહાડતાં જેટલા દશ લાખ રહે તેનું ઘનમૂળ કહાડી તેને સોએ ગુણવાથી તે સંખ્યાનું ઘનમૂળ આવશે. ૫ શતકનો ઘન ૧૨૫૦૦૦૦૦૦ આવશે તેનું ઘનમૂળ કડાડવું હોયતો છેલ્લા છ અંક કહાડી ૧૨૫નું ઘનમૂળ કહાડયું તો પાંચ આવ્યું તેને ૧૦૦એ ગુણ્યા એટલે ૫૦૦ જવાબ.

માટે કેટલાક દશલાખ, કેટલાક હજાર અને શતક, દશક ને એકમ હોય એવી સંખ્યાનું ઘનમૂળ કહાડવું હોયતો છેલ્લા છ અંક જૂદા રાખતાં જેટલા દશલાખ હોય તેનુંઘનમૂળ કહાડવું, પછી જેટલા હજાર હોય તેનું ને પછી છેલ્લા ત્રણ અંકનું કહાડવું એટલે પ્રથમ અંક શતકનો પછી દશકનો ને છેલ્લો એકમનો આવશે. પણ એ પ્રમાણે અંકો જૂદા રાખવાને બદલે તેમના ઉપર ટપકાની નિશાની વર્ગ-

મૂળમાં કરીએ છીએ તેવી કર્યાથી પણ ચાલશે એટલે ૧૭૫૬૧૬ આનું ઘનમૂળ કહાડવું હોયતો છેલ્લા ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ એકમને ૧૭૫ હજારનું ઘનમૂળ દશક આવશે માટે ૧૭૫૬૧૬ આ પ્રમાણે ટપકાં કર્યાથી પણ ચાલશે. ૧૭૫૬૧૬ ના ઘનમૂળમાં બે અંક આવશે. પેહેલો દશકને બીજો એકમનો. ઘનમૂળ કહાડવાની સંખ્યા ઉપર ત્રણ ત્રણ અંકે ટપકાં શાથી કરે છે તે ઉપરની રીતથી સમજાશે. દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં. ૧નો ઘન ·૦૦૧ છે માટે ·૦૦૧નું ઘનમૂળ ·૧ આવે એટલે ·૦૦૧ ના ગમે તેટલા ઘન ગણા કરીશું તેનું ઘનમૂળ તેટલા દશાંશ આવશે. ·૪નો ઘન ·૦૬૪નું ઘનમૂળ ·૪ આવશે. એટલે દશાંશના પેહેલા ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ દશાંશ, તે પછીના ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ શતાંશઈ૦ આવશે. માટે જે સંખ્યાનું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તેના દશાંશમાં પણ ડાબા હાથ ભણીથી ત્રણ અંકગણી તે ઉપર ટપકાં કરવાં. જેટલાં ટપકાં થશે તેટલા અંક ઘનમૂળના દશાંશમાં આવશે. જો ત્રણ અંક પૂરા ન થતા હોયતો ખૂટતાં મીડાં ચઢાવવાં. કેમકે દશાંશમાં જમણા હાથ ભણી મીડાં ચડાવ્યાથી કીમતમાં કાંઈ ફેર પડતો નથી, જેમકે ·૪ નું ઘનમૂળ કહાડવું હોયતો ·૪૦૦નું કહાડવું. કેમકે ·૪નીને ·૪૦૦ ની કીમત સરખીજ છે-

ઘનમૂળની રીતનું કારણ—નીચે ગણેલા દાખલાથી સમજાશે. ૧૭૫૬૧૬નું ઘનમૂળ કહાડવું હોયતો ૧૭૫૬૧૬ ટપકાં મૂક્યાથી જણાય છે કે ઘનમૂળમાં બે અંક આવશે. એકમ ને દશક. માટે એ સંખ્યામાં દશક^3+૩×દશક^2× એકમ+૩×દશક×એકમ^2+એકમ^3 સમાવા જોઇએ. તેથી

)૧૭૫૬૧૬(૫૦+૬=૫૬

૫૦^3 = ૧૨૫૦૦૦

૩×૫૦^2=૭૫૦૦) ૫૦૬૧૬(૬

(૩×૫૦^2+૩×૫૦×૬+૬^2)×૬ = ૫૦૬૧૬=૩×૫૦^2×૬+૩×૫૦×૬^2+૬^3

૦૦૦૦૦

અથવા $૩×૫૦^{૨}=૭૫૦૦$

$+૩×૫૦×૬=૯૦૦$

$+ \quad ૬^{૨}=૩૬$

$૮૪૩૬×૬=૫૦૬૧૬$

ઉપલા હિસાબમાં પ્રથમ ૧૭૫૦૦૦નું ઘનમૂળ કહાડવાનું છે તેનું ઘનમૂળ ૫ આવે છે તે દશક આવ્યા તેથી એ આખી સંખ્યામાંથી $૫૦^{૩}$બાદ કર્યોતો ૫૦૬૧૬ બાકીરેહે છે તેમાં $૫૦^{૨}×૩×$એકમ$+૩×૫૦×$એકમ$^{૨}+$એકમ^{૩}સમાવા જોઇએ. હવે એકમ કયો આવશે તે જાણવા માટે ૫૦૬૧૬ ને $૫૦^{૨}×૩$ વડેભાગ્યાતો ૬ આવે છે તેથી ૬ એકમ આવશે એમ જણાય છે, માટે ૫૦૬૧૬માંથી $૩×૫૦^{૨}×૬+૩×૫૦×૬^{૨}+૬^{૩}$અથવા $(૩×૫૦^{૨}+૩×૫૦×૬+૬^{૨})×૬$ બાદ કરવા જોઇએ પણ $(૩×૫૦^{૨}+૩×૫૦×૬+૬^{૨})×૬=૫૦૬૧૬$ છે માટે ૧૭૫૬૧૬નું ઘનમૂળ ૫૦+૬=૫૬આવ્યા એ જવાબ.

તેમજ ત્રણ આંક ઘનમૂળમાં આવે એવી સંખ્યાલીધી. જેમકે ૩૩૬૯૮૨૬૭નું ઘનમૂળ કહાડવું હોયતો ચિન્હ મૂકયાથી માલમ પડે છે કે એ સંખ્યાનું ઘનમૂળ ત્રણઆંક આવશે એટલે પ્રથમ આંક સોનો બીજો દશકનો ને ત્રીજો એકમનોઆવશે.

૩૩૬૯૮૨૬૭ | ૩૦૦

$૩૦૦^{૩}=$ ૨૭૦૦૦૦૦૦

૬૬૯૮૨૬૭ | ૨૦

$૩×૩૦૦^{૨}=૨૭૦૦૦૦$

$૩×૩૦૦×૨૦=૧૮૦૦૦$

$૨૦^{૨}=૪૦૦$

૨૮૮૪૦૦

$×૨૦=$ $૫૭૬૮૦૦૦=૩×૩૦૦^{૨}×૨૦+૩×૩૦૦×૨૦^{૨}+૨૦^{૩}$ અથવા $(૩×૩૦૦^{૨}+૩×૩૦૦×૨૦+૨૦^{૨})×૨૦$

$૩×૩૨૦^{૨}=૩૦૭૨૦૦$) ૯૩૦૨૬૭ (

$૨×૩૨૦×૩=૨૮૮૦$

$૩^{૨}=૯$

૩૧૦૦૮૯

$×૩=$ $૯૩૦૨૬૭=૩×૩૨૦^{૨}×૩+૩×૩૨૦×૩^{૨}+૩^{૩}$અથવા$(૩×૩૨૦^{૨}+૩×૩૨૦×૩+૩^{૨})×૩$

૦૦૦૦૦૦

ઉપલા હિસાબમાં પ્રથમ ૩૩૦૦૦૦૦૦નું ઘનમૂળ કઢાડવાનું છે તે ૩૦૦ આવ્યું માટે ૩૦૦નો ઘન ૨૭૦૦૦૦૦૦ બાદ કર્યાતો ૬૬૯૮૨૬૭ બાકી કહ્યા તેમાં ૩×૩૦૦^{2}×દશક+૩×૩૦૦×દશક^{2}+દશક^{3} સમાવા જોઈએ. તેથી કયોદશક સમાશે તે જાણવા સારૂ પ્રથમ ૩×૩૦૦^{2} વડે ભાગ્યા તો ૨ દશક અથવા ૨૦ આવે છે માટે બીજો અંક ૨૦ આવશે તેથી ૬૬૯૮૨૬૭માંથી ૩×૩૦૦^{2}×૨૦+૩×૩૦૦×૨૦^{2}+૨૦^{3} અથવા (૩×૩૦૦^{2}+૩×૩૦૦×૨૦+૨૦^{2})×૨૦ બાદ કર્યાતો ૯૩૦૨૬૭ બાકી રહેલા છે પણ તેમાં ૩×૩૨૦^{2}×એકમ+૩×૩૨૦×એકમ^{2}+એકમ^{3} સમાવા જોઇએ માટે ૯૩૦૨૬૭ને ૩×૩૨૦^{2} વડે ભાગ્યા તો ૩ એકમ આવ્યા માટે ત્રીજો અંક અથવા એકમ ૩ આવશે તેથી ૯૩૦૨૬૭માંથી ૩×૩૨૦^{2}×૩+૩×૩૨૦×૩^{2}+૩^{3} અથવા (૩×૩૨૦^{2}+૩×૩૨૦×૩+૩^{2})×૩=૯૩૦૨૬૭ બાદ કીધા તો કાંઈ ન વધ્યું માટે ૩૩૬૯૮૨૬૭નું ઘનમૂળ ૩૦૦+૨૦+૩=૩૨૩ આવ્યા.

ઉપલા હિસાબને બીજી ટુંકી રીતે ગણીએ તો નીચે પ્રમાણે ગણાશે.

	૩૩૬૯૮૨૬૭(૩૨૩	
૩^{3}=	૨૭	
૩×૩૦^{2}= ૨૭૦૦	૬૬૯૮	પ્રથમ ભાજક ૩
૩×૩૦×૨= ૧૮૦		એ ૩૦૦ છે પણ
૨^{2}= ૪		બીજો ભાજક કહા-
૨૮૮૪×૨=	૫૭૬૮	ડવો છે તેથી ૩૦૦
૩×૩૨૦^{2}=૩૦૭૨૦૦	૯૩૦૨૬૭	ના દશક ૩૦ માટે ૩૦
૩×૩૨૦×૩= ૨૮૮૦		લીધાછે એ ૩×૩૦^{2}
૩^{2}= ૯		=૨૭૦૦ એ પ્રથમ
૩૧૦૦૮૯×૩=	૯૩૦૨૬૭	અજમાયશ ભાજક
	૦૦૦૦૦૦	આવ્યો છે

હવે ત્રીજો ભાજક એકમ કહાડવો છે તેથી ૩૨ દશકના એકમ ૩૨૦ લીધાછે એ ૩×૩૨૦^{2}=૩૦૭૨૦૦ એ બીજો અજમાયશ ભાજક આવ્યો છે.

વળી ઉપરના હિસાબને ટુંકામાં નીચે પ્રમાણે ગણાશે એ રીત પણ ઉપરની રીત ઉપરથીજ કરેલી છે.

	૩૩૬૯૮૨૬૭(૩૨૩	૩×૩૨^{૨}=૩૦૭૨ છે
પેહેલોઅજમાયશભાજક	૨૭	હવે ૩૨^{૨}=૩૦^{૨}+
૩×૩૦^{૨}=૨૭૦૦	૬૬૯૮	૨(૩૦×૨)+૨^{૨} છેતેને
૩×૩૦×૨+૨^{૨}=૧૮૪		ત્રણે ગુણવામાટે ૩×
૨૮૮૪	×૨=૫૭૬૮	૩૦^{૨}+૩×૩(૩૦×૨)
બીજોઅજમાયશ ૪	૯૩૦૨૬૭	+૩×૨^{૨} થવાજોઈએ
ભાજક ૩×૩૨૦^{૨}=૩૦૭૨૦૦		તે ૧૮૪+૨૮૮૪+૪
(૩×૩૨૦×૩)+૩^{૨}=૨૮૮૯		થી થઈરહેછે માટેએ
૩૧૦૦૮૯×૩=૯૩૦૨૬૭		ત્રણનોસરવાળો કરી
	૦૦૦૦૦૦	બે મીંડાં ચઢાવી ૩×
		૩૨૦^{૨} ઉત્પન કર્યાહવે

૨૮૮૪માં ૩×૩૦^{૨}+૩×૩૦×૨ એકવારછે. અને એકવાર બેનોવર્ગ છેતે ૧૮૪માં પણ એકવાર ૩×૩૦+૨ બેનો વર્ગછે. માટેબેવાર ૩×૩૦×૨ આવ્યા અને બેવાર બેનો વર્ગ આવ્યો પણ બેનો વર્ગ ત્રણવાર જોઇએ તેથી ત્રીજીવાર ઉપલી ૧૮૪+ ૨૮૮૪ની રકમમાં બેનો વર્ગ ઉમર્યો એટલે ૩×૩૨^{૨} થઇરહ્યો પણ ૩×૩૨૦^{૨} જોઈએ છીએ માટે ૩×૩૨^{૨}=૩૦૭૨ ઉપર બેમીંડાં મૂકયાથી ૩૦૭૨૦૦ આવ્યા છે. આગળ ભાગ કહાડવો હોયતો અજમાયશ ભાજક કહાડવાને એજ પ્રમાણે કર્યાથી આવશે એટલે વર્ગ કરી ત્રણે ગુણવાની કડાકુટ પડશેનહિ.

ઉપરની રીત ઉપરથી વળી બીજી ટુંકી રીત થાય છે.

૩૩૬૯૮૨૬૭(૩૨૩
૨૭
૬૬૯૮
અજમાયશ ભાજક ૩×૩² = ૨૭)
૩×૩×૨ = ૧૮
૨² = ૪
૨૮૮૪ × ૨ = ૫૭૬૮
૪
૯૩૦૨૬૭
અજમાયશ ભાજક ૩×૩૨² = ૩૦૭૨
૩×૩૨×૩ = ૨૮૮
૩² = ૯
૩૧૦૦૮૯ × ૩ = ૯૩૦૨૬૭
૦૦૦૦૦

આ રીતમાં માત્ર ભાજકમાં મીંડાં આવતાં તે કહાડી નાખ્યાંછે ને તેને બદલે આંકકાપીને મૂક્યાછે.

ઉપરની રીત ઉપરથીજ હાર્નર સાહેબની રીત નીચે પ્રમાણે નીકળીછે એ રીતમાં ત્રણ ને નવા ભાગાકારના વર્ગે ગુણી અજમાયશ ભાજક કહાડવાનોછે તેને બદલે બે ખાનાં પાડેછે એટલે પેહેલા ખાના ઉપરથી અજમાયશ ભાજકમાં ખરો ભાજક લાવવાની રકમ કહાડી શકાયછે ને ઉપરની રીતમાં અજમાયશ ભાજકમાં સરવાળો કરવો પડે છે તેને બદલે એ રીતથી અજમાયશમાં માત્ર એકજ રકમ ઉમેરવાની નીકળે છે તેમજ પેહેલા ખરા ભાજકની સાથે બીજી ત્રણ રકમ ઉમેરવાથી નવો અજમાયશ ભાજક નીકળે છે. તેને બદલે આ રીતથી એકજ રકમ ઉમેરવી પડેછે એ ઉમેરવાની રકમ ઉપરની રીતમાં આપેલી રકમોના સરવાળા બરાબર થઇ રહેછે તે નીચેની રીતથી સમજાશે એટલે આ હાર્નર સાહેબની રીત સેહેલી ને યાદ રહે એવી છે ને તેમાં ભૂલ થવાનો સંભવ થોડો રહેછે જેમકે

```
                                  |૩૩૬૯૮૨૬૭|૩૨
૩×૩૦=૯૦  ×૩૦=૨૭૦૦                 |૨૭
     ૨                              ————
    ————                             ૬૬૯૮
    ૯૨×૨     = ૧૮૪ ⎫
     ૪         ————  ⎬ ×૨=૫૭૬૮
    ————      ૨૮૮૪ ⎪   ————————
    ૯૬૦          ૪  ⎭    ૯૩૦૨૬૭
     ૩        ————
    ————      ૩૦૭૨૦૦
    ૯૬૩×૩ =     ૨૮૮૯
              ————————
              ૩૧૦૦૮૯×૩= ૯૩૦૨૬૭
                         ————————
                          ૦૦૦૦૦૦
```

પ્રથમ ૩×૩^{૨} મૂકતા તેને બદલે બીજો આંક દશક આ-વવાનો તે ઉમેરવોછે માટે ૩×૩૦=૯૦ ને ૯૦× ૩૦=૨૭૦૦ મૂક્યા છે. તેમાં ૯૦+૨=૯૨ ને૯૨×૨=૧૮૪ ઉમેર્યાથી ૨૮૮૪ ખરો ભાજક આવ્યો. તે ઊપર પણ આવેલોછે. હવે પ્રથમ આપણે ૩×૩૦×૨+૨^{૨}=૧૮૪ ઉપજાવ્યા હતા ને ૩×૩૦×૨+૨^{૨}=(૩×૩૦+૨)×૨ છે તેથી એ રીત ઉત્પન્ન કરી છે. વળી ૯૨માં બે વાર બે ઉમેર્યાથી ૯૬ થયા તે દશકછેતેમાં એકમ ઉમેરવાનો માટે તેના એકમ કરવાને મીંડું ચહાવ્યું ને ૩૦૭૨ એ ૩×૩૨^{૨}છે પણ તે ૩×૩૨૦^{૨} ઉપરનીરીતે આ વવો જોઇએ માટે૩૦૭૨ ઉપર બે મીડાંચઢાવી૩૦૭૨૦૦કર્યાછે.

પ્રથમની રીતમાં બીજા અજમાયશભાજક ૩૦૭૨૦૦ માં ૩×૩૨૦×૩+૩^{૨} ઉમેરતા એટલે ૨૮૮૯ ઉમેરતા તે ૯૬૩×૩ની બરાબરછે કેમકે ૩×૩૨૦×૩+૩^{૨}=(૩×૩૨૦+૩)×૩ છે તેથી ૨૮૮૯ ઊપરની રીતે ઉત્પન્ન કરી ઉમેર્યાછે.

વળી એ રીત ઉપરથી નીચેની બીજી રીત નીકળીછે, આ રીત કોઇ પણ ઘાતમૂળ કહાડવામાં કામ આવે છે. જેટલા ઘાતમૂળ કહાડવું હોય તેના કરતાં એક ઓછું એ-ટલાં ખાનાં ભાજકમાં પાડવાં. પછી પેહેલા ખાનામાં પેહેલો ભાગાકાર, બીજામાં તેનો વર્ગ, ત્રીજામાં તેનો ઘન, એ પ્ર-

માણે મૂકવેા. પછી પેહેલા ખાનામાં તેજ ભાગાકાર ઉમેરવેા. તેને ભાગાકારે ગુણી બીજામાં, ને તેને ભાગાકારે ગુણી ત્રીજામાં એમ ઉમેરવા. વળી પેહેલા ખાનામાં પેહેલેા ભાગ ઉમેરવેા, તેને ભાગાકારે ગુણી બીજામાં, ને તેને ભાગાકારે ગુણી ત્રીજામાં ઉમેરવા. મતલબ કે એવી ઉમેરવાની રકમ છેલ્લા ખાનામાં એકવાર, તેની પાસેના ડાબા હાથના ખાનામાં બેવાર, તેની પાસેના ખાનામાં ત્રણવાર, એ પ્રમાણે ઉમેરવી; એટલે ઘનમૂળ કાઢવું હેાય તેા બે ખાનાં હેાય માટે ડાબાહાથના પેહેલા ખાનામાં બે વાર ને બીજામાં એકવાર ઉમેરવી. ચતુર્ઘાત મૂળ હેાય તેા પેહેલામાં ત્રણવાર, બીજામાં બેવાર ને ત્રીજામાં એકવાર એમ ઉમેરવી. પછી પેહેલા ખાનાની સંખ્યા ઉપર એક, બીજા ખાનાની સંખ્યા ઉપર બે, ને ત્રીજા ખાનાની સંખ્યા ઉપર ત્રણ મીડાં મૂકવાં. એ છેલ્લા ખાનાની સંખ્યા અજમાયશ ભાજક થશે. તે ઉપર નવેા ભાગ કહાડવેા. ને નવેા ભાગ વળી પેહેલા ખાનામાં ઉમેરી, તેને નવા ભાગે ગુણી બીજા ખાનામાં ઉમેરવેા ને તેને નવા ભાગે ગુણી ભાજ્યમાંથી બાદ કરવેા. બાકી ઉપર બીજા ત્રણ અંક ઊમેરવા. પછી વળી ઉપરની રીતે ત્રણખાનાં હેાય તેા પેહેલા ખાનામાં નવેા ભાગ ત્રણવાર, બીજામાં બે વાર ને ત્રીજામાં એકવાર ઉમેરી, ઉપર પ્રમાણે મીડાં ચઢાવવાં, એટલે છેલ્લા ખાનાની સંખ્યા અજમાયશ ભાજક થશે. તે ઉપરથી નવેા ભાગ કાહાડવેા. પછી છેલ્લા ખાનામાં નવેા ભાગ ઉમેરી, તેને નવા ભાગે ગુણી બીજામાં, ને તેને નવા ભાગે ગુણી ત્રીજામાં ઉમેરવાથી સરવાળેા ખરેા ભાજક થશે. તેને નવા ભાજકે ગુણી ભાજ્યમાંથી બાદ કરવા. એ રીતે જેટલા અંક આવવાના હેાય ત્યાંસુધી કરવું. આ રીત, નીચે દાખલેા કરી બતાવ્યેાછે, તેથી સમજાશે. તેનું કારણ હાર્નર સાહેબની રીત, સાથે સરખાવ્યાથી માલમ પડશે. નીચે ઘનમૂળછે માટે ભાજકમાંબેખાનાંપાડયાંછે.

૩ ૯ |૩૩૬૯૮૨૬૭ | ૩૨૩
૩ ૨૭
૬×૩ = ૧૮ ૬૬૯૮
૩ ૨૭૦૦
૯૦
૨
૯૨×૨ = ૧૮૪
૨ ૨૮૮૪×૨ = ૫૭૬૮
૯૪×૨ = ૧૮૮ |૯૩૦૨૬૭
૨ ૩૦૭૨૦૦
૯૬૦
૩
૯૬૩×૩= ૨૮૮૯ ૯૩૦૨૬૭
૩૧૦૦૮૯×૩= ૦૦૦૦૦૦

ઉપરની રીતે ચતુર્ઘાતમૂળનો દાખલો ૩ ખાનાં પાડી નીચે પ્રમાણેછે.

૩ ૯ ૨૭ |૧૦૮૮૪૫૪૦૨૪૧|૩૨૩
૩ ૮૧
૬×૩ =૧૮
૩ ૨૭ ×૩ = ૮૧
૯×૩ =૨૭ ૧૦૮૦૦૦ | ૨૭૮૪૫૪
૩ ૫૪૦૦
૧૨૦
૨
૧૨૨×૨ = ૨૪૪
૨ ૫૬૪૪×૨ = ૧૧૨૮૮
૧૨૪×૨ = ૨૪૮ ૧૧૯૨૮૮×૨ = ૨૩૮૫૭૬
૨ ૫૮૯૨×૨ = ૧૧૭૮૪
૧૨૬×૨= ૨૫૨ ૧૩૧૦૭૨૦૦૦ | ૩૯૮૭૮૦૨૪૧
૨ ૬૧૪૪૦૦
૧૨૮૦
૩
૧૨૮૩×૩= ૩૮૪૯
૬૧૮૨૪૯×૩= ૧૮૫૪૭૪૭
૧૩૨૯૨૬૭૪૭×૩= ૩૯૮૭૮૦૨૪૧
૦૦૦૦૦૦૦૦૦

પણુ આ રીત લાંબી હેાવાથી બહુઘાતમૂળમાં આ રીત કામે નહિ લગાડતાં જ્યાં જરૂર પડે ત્યાંજ માત્ર કામે લગાડવી. કેમકે ચતુર્ઘાત મૂળ કહાડવું હેાય તેા વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ કહાડવુ' એટલે ચતુર્ઘાત મૂળ નીકળશે. કેમકે ઘાતમાં પાછળ આવી ગયું કે વર્ગનેા વર્ગ કરવાથી ચતુર્ઘાત થાય છે. માટે વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ કહાડયાથી ચતુર્ઘાત મૂળ આવે. તેમજ ઘનનેા વર્ગ છ ઘાત થાયછે માટે ઘનમૂળનું વર્ગમૂળ એ છ ઘાતમૂળ થાય. વળી વર્ગના વર્ગનેા વર્ગ કરવાથી અષ્ટઘાત થાયછે. માટે વર્ગમૂળના વર્ગમૂળનુ વર્ગમૂળ એટલે ત્રણ વાર વર્ગમૂળ કહાડ્યાથી અષ્ટઘાતમૂળ આવેછે. ઘનનેા ઘન કરવાથી એટલે ઘનનેા વર્ગ કરી તેને ઘનની રકમે ગુણવાથી નવ ઘાત થાયછે માટે ઘનમૂળનું ઘનમૂળ કહાડ્યાથીનવ ઘાતમૂળ આવે. આ પ્રમાણે કરવાથી ઉપરની લાંબી રીતે ગણુવા પડતા નથી. પણુ જ્યાં એ રીત કામે લાગતી નથી, ત્યાં ઉપરની રીતે ખાનાં પાડી કરવાની જરૂર પડેછે. કેાઇ રકમનું પંચ ઘાતમૂળ, સપ્ત ઘાતમૂળ ઇત્યાદી ઘાતમૂળ ઉપરની વર્ગમૂળ ઘનમૂળની રીતે નીકળશે નહિ, કેમકે વર્ગનેા કે ઘનનેા કેાઈ ઘાત કરવાથી પ'ચઘાત કે સપ્ત ઘાત થતેા નથી. માટે એવાં ઘાતમૂળ કહાડવાં હેાય ત્યારે ઉપલી ખાનાં પાડીને કરવાની રીતે ઘાતમૂળ કહાડવું.

ક્ષેત્રફળ.

સપાટી ઉપર જે આકૃતિએા થાય તેનુ' માપ કહાડવાની રીતને ક્ષેત્રફળ કહે છે. એ આકૃતીએા ગેાળ, ચેાખુણુ, બહુખુણુ, ત્રિકેાણુ ઇત્યાદિ આકારની હેાય છે. એ જુદી જુદી આકૃતિએાની વ્યાખ્યા ભણુનારે યાદરાખવીજોઇએ.

કાટખુણુ ચેાખુણનું ક્ષેત્રફળ કાટખુણેા કરનારી બેબાજુના એટલે લ'બાઈ ને પહેાળાઇના ગુણાકારની બરાબર છે.

કારણુ—એક કાગળ એક ફુટ લાંબેા અને એક ફુટ

પહોળો હોય તેને એક ચોરસ ફુટ કહે છે. હવે એક કાગળ ત્રણ ફુટ લાંબો હોય ને એક ફુટ પહોળો હોય તો તેના એક એક ચોરસ ફુટ જેવડા ત્રણ કડકા થાય છે. પણ જો તે કાગળ બે ફુટ પહોળો હોય તો ૩×૨=૬ કડકા થાય એટલે ૬ ચોરસ ફુટ થાય. ને લંબાઇને પહોળાઇનો ગુણાકાર ૬ ચોરસ થાય છે, તેથી ઉપરની રીત નીકળી છે.

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની એક બાજુના વર્ગની બરાબર છે, કારણ કે ચોરસની લંબાઈને પહોળાઇ સરખી હોય છે. એટલે લંબાઇને પહોળાઈનો ગુણાકાર ને એક બાજુનો વર્ગ કરવો એ બંને સરખુંજ છે.

સમાંતર બાજુ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પાયો અને પાયા ઉપર સામેના ખુણાથી લંબ દોરીએ તે બેના ગુણાકાર બરાબર છે.

કારણ—સમાંતર બાજુ ચોખુણમાં પાયા ઉપર સામેના બંને ખુણાથી લંબ દોરીશું તો તે બંને લંબથી એક કાટખુણ ચોખુણ થશે. એ કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પ્રથમ કહેલા સમાંતર બાજુ ચોખુણની †બરાબર છે. ને બંને ચોખુણના પાયા સરખા છે, માટે સમાંતર બાજુ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પાયાનો ને પાયા ઉપર તેની સામેના ખુણાથી દોરેલા લંબના ગુણાકારની બરાબર છે.

કોઇ પણ ચોખુણ કે બહુખુણ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો તેના ત્રિકોણ કરી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રીતે ક્ષેત્રફળ કહાડી સરવાળો કરવો કેમકે તે ત્રિકોણો મળવાથી તે આપેલી આકૃતિ થએલી છે.

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાની સામેની બે બાજુ આપી હોય તો ત્રીજી બાજુ નીકળે છે. કેમકે કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાની સામેની બાજુનો વર્ગ તે, કાટખુણો ક-

† ભૂમિતિના પ્રથમ ભાગની ૩૫મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.

રનારી બંને બાજુના વર્ગોના સરવાળા બરાબર છે.+ એટલે કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણો કરનારી બાજુમાંની એક ત્રણ ફુટ ને બીજી ૪ ફુટ હોય તો $૩^૨+૪^૨=૫^૨$ એ કાટખુણા સામેની બાજુનો વર્ગ થાય. માટે $૫^૨$નું વર્ગમૂળ ૫ ફુટ કર્ણ અથવા કાટખુણાની સામેની બાજુ થઇ, હવે જો એ ત્રણ બાજુમાંની ૩ ને ૫ ફુટ વાળી બે બાજુ આપી હોય તો $૫^૨-૩^૨=૪^૨$ એ બાકીની બાજુનો વર્ગ, માટે તેનું વર્ગમૂળ ૪ ફુટની એ બાજુ થઇ. તેમજ ૫ ને ૪ ફુટની બે બાજુ આપી હોય તો $૫^૨-૪^૨=૩^૨$ એ બાકીની બાજુનો વર્ગ માટે તેનું વર્ગમૂળ ૩ ફુટની એ બાજુ થઇ.

કોઈ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો પાયાનો ને તેનો સામેના ખુણાથી પાયા ઉપર દોરેલા લંબનો ગુણાકાર કરી તેને બેએ ભાગવા. કારણ—એક પાયા ઉપરને એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના સમાંતર બાજુ ચોખુણથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અર્ધુંછે, ‡ ને કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પાયો ને લંબના ગુણાકારની બરાબર છે, માટે તેના અર્દ્ધ બરાબર ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ થાય.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રજી રીત–ત્રિકોણની ત્રણે બાજુનો સરવાળો કરી તેનું અર્દ્ધ કરવું. એ અર્દ્ધમાંથી ત્રણે બાજુઓ જુદી જુદી બાદ કરવી. એ ત્રણ બાકીઓ અને અર્દ્ધનો ગુણાકાર કરી તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું.*

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કર્ણ અને પાયો આપ્યો હોયતો કર્ણના વર્ગમાંથી પાયાનો વર્ગ બાદ કર્યાથી લંબનો વર્ગ નીકળશે. તેનું વર્ગમૂળ કર્યાથી લંબ આવશે. પછી લંબને પા-

---

+ભૂમીતિના પ્રથમ ભાગની ૪૭મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.

‡ભૂમીતિના પ્રથમ ભાગની ૪૧મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.

*ભૂમીતિની પાછલી બુકોને આધારે સિદ્ધ થશે.

યાના ગુણાકારનું અર્ધ કરવું. આનું કારણ ઉપર આવીગયું છે. તેજ પ્રમાણે કર્ણ ને લંબ આપે તો કર્ણનો વર્ગ–લંબના વર્ગ=પાયાનો વર્ગ આવે. તેનું વર્ગમૂળ પાયો આવશે. પછી ઉપરની રીતે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું. જો ક્ષેત્રફળ અને પાયા ઉપરથી કર્ણ કે લંબ કહાડવો હોયતો $\frac{\text{પાયો}\times\text{લંબ}}{૨}=$

ક્ષેત્રફળ. માટે લંબ$=\frac{\text{ક્ષેત્રફળ}}{\text{પાયો}}\times૨$ પછી લંબનો ને પાયાનો વર્ગ કરો સરવાળો લેઈ તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે કર્ણઆવશે.

કોઇ પણ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને લંબ આપ્યોહોય ને પાયો કહાડવો હોય તોઃ—

$$\frac{\text{લંબ}\times\text{પાયો}}{૨}=\text{ક્ષેત્રફળ. માટે પાયો}=\frac{\text{ક્ષેત્રફળ}}{\text{લંબ}}\times૨.$$

ગોળનું ક્ષેત્રફળ.

ગોળના વ્યાસ ને પરીઘનું ગુણોત્તર ૭ : ૨૨ એ પ્રમાણમાં છે. એટલે વ્યાસ ૭ ફુટ હોયતો પરીઘ ૨૨ ફુટ હોય. પણ એ પ્રમાણથી વધારે લગભગ પ્રમાણ ૧૧૩=૩૫૫અથવા ૧:૩·૧૪૧૬ અથવા ૧:૩·૧૪૧૫૯૨૬૫૩૫૮૯.+ છેલ્લું પ્રમાણ ખરાનીલગભગ છે, પણ તે લાંબું હોવાથી હિસાબ ગણવામાં પહેલાં ત્રણ પ્રમાણ લેવાય છે. તેમાં પણ વિશેષે ત્રીજું પ્રમાણ લેવાય છે.

કોઇ ગોળનું ક્ષેત્રફળ તેના પરીઘના ચોથા ભાગજેટલી લંબાઈના ને વ્યાસ જેટલી પહોળાઈના કાટખુણચોખુણના ક્ષેત્રફળ બરાબર છે*માટે ગોળનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો પરીઘ ને વ્યાસના ગુણાકારને ચારે ભાગવા. અ-

---

+આ પ્રમાણોની સત્યતા ત્રિકોણમીતિની રીતે સિદ્ધ થશે.

*આ રીતની સત્યતા ભૂમીતિની છઠી બૂક પ્રમાણે છે.

થવા પરીઘના અર્દ્ધને વ્યાસના અર્દ્ધે ગુણવા.

ગોળના ક્ષેત્રફળ= $\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{પરીઘ}}{\text{૪}}$ પણ પરીઘ=વ્યાસ×૩·૧૪૧૬

છે માટે = $\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{પરીઘ અથવા વ્યાસ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$ =

$\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{વ્યાસ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$ એટલે $\frac{\text{વ્યાસનોવર્ગ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$

અથવા વ્યાસનો વર્ગ× $\frac{\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$ અથવા વ્યાસનોવર્ગ × ·૭૮૫૪. મતલબ કે વ્યાસના વર્ગને ·૭૮૫૪વડે ગુણવાથી ગોળનું ક્ષેત્રફળ નીકળે છે અથવા ગોળના ક્ષેત્રફળ= $\frac{\text{વ્યાસનો વર્ગ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$ છે. પણ ત્રિજ્યા વ્યાસથી અરધીછે માટે ત્રિજ્યાનાવર્ગના ચારગણા=વ્યાસનો વર્ગ થાય તેથીગોળના ક્ષેત્રફળ= $\frac{\text{ત્રિજ્યાનો વર્ગ}\times\text{૩·૧૪૧૬}\times\text{૪}}{\text{૪}}$ =ત્રિજ્યાનો વર્ગ×૩·૧૪૧૬

વળી ગોળના ક્ષેત્રફળ= $\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{પરીઘ}}{\text{૪}}$ પણ પરીઘનો ૩·૧૪૧૬ મોભાગવ્યાસછેમાટેગોળનાક્ષે.ફ.= $\frac{\text{પરીઘ}\times\text{પરીઘ}}{\text{૪}}$ ÷ ૩·૧૪૧૬

અથવા પરીઘનો વર્ગ÷૪×૩·૧૪૧૬. અથવા પરીઘનો વર્ગ÷૧૨·૫૬૬૪. અથવા પરીઘનો વર્ગ×·૦૭૯૫૮.

એક મોટા ગોળમાં નાનો ગોળ હોય તો તે બે ગો-ળના બંને પરીઘો વચ્ચે કેટલું અંતરછે અથવા નાના ગોળથી મોટો ગોળ કેટલો મોટોછે તે કહાડવું હોય તો મોટા ગો-ળના ક્ષેત્રફળમાંથી નાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ બાદ કરવું. એનું કારણ દેખીતુંછે. પણ બંને ગોળના પરીઘ આપ્યા હોય તો મોટા ગોળના ક્ષેત્રફળ—નાના ગોળના ક્ષેત્રફળ=મોટા

ગોળના વ્યાસ^{૨}×.૭૮૫૪—નાના ગોળનો વ્યાસ૨×.૭૮૫૪ અથવા મોટા ગોળના વ્યાસનો વર્ગ—નાના ગોળના વ્યાસ^{૨} ×.૭૮૫૪ એટલે બંને ગોળના ક્ષેત્રફળની બાદબાકી બરાબર=બંને ગોળના વ્યાસોના વર્ગોની બાદબાકી ×.૭૮૫૪ અથવા બંને વ્યાસોના સરવાળાને તે બે વ્યાસોની બાદબાકીએ ગુણી તેને .૭૮૫૪ એ ગુણવા. કેમકે કોઇ પણ બે સંખ્યાનો સરવાળો ને તેજ બે સંખ્યાની બાદબાકીનો ગુણાકાર તે, તે બે સંખ્યાના વર્ગોની બાદબાકી બરાબર છે. જેમકે (૬+૪)×(૬−૪)=૬^{૨}−૪^{૨}=૨૦. માટે મોટા વ્યાસ^{૨}−નાના વ્યાસ^{૨}=(મોટો વ્યાસ+નાનો વ્યાસ)×(મોટો વ્યાસ−નાનો વ્યાસ)

ઘનફળ.

જેમ સપાટ જગાના માપને ક્ષેત્રફળ કહે છે, તેમ નક્કર પદાર્થના ઘન માપને ઘનફળ કહે છે. નક્કર પદાર્થને લંબાઈ, પહોળાઇ ને જાડાઇ હોયછે. થાંભલો, મોભ, શંકુ, ગોળો. એ નક્કર પદાર્થ છે. એ પદાર્થોનાપ્રીઝમ, ઘન, વર્તુળ, શંકુ, ગોળ, વગેરે આકાર હોય છે.

કાટખુણુ પ્રીઝમનું ઘનફળ કહાડવું હોય તો તેની લંબાઈ, પહોળાઇ, ને જાડાઇનો ગુણાકાર કરવો. કારણ—સપાટ સફાઈના આકારનું માપ ચોરસ માપથી મપાય છે,તેમ નક્કર પદાર્થ ઘનમાપથી મપાય છે. ઘનમાપ એટલે જેમાપ લંબાઇમાં, પહોળાઈમાં, ને જાડાઇમાં, સરખું હોય. જેમકે એક ઘનઈંચ એટલે એક ઇંચ લાંબુ. એક ઇંચ પહોળું ને એક ઇંચ જાડું. એક ઘનફૂટ એટલે એક ફૂટ લાંબુ, એક ફૂટ પહોળુંને એક ફૂટ જાડું. હવે એક નક્કર પદાર્થ કાટખુણુ પ્રીઝમ હોય ને તે ૪ ફૂટ લાંબો, બે ફૂટ પહોળોને ત્રણ ફૂટ ઉંચો અથવા જાડો હોય તો તેમાંથી કેટલા ઘનફૂટ નીકળે? ચાર ફૂટ લંબાઇમાંથી એક ફૂટ લાંબા કડકા કહાડીએતો ચાર થાય પણ તે ત્રણ ફૂટ લાંબાને ૨ ફૂટ પહોળા હોય. હવે

પહોળાઇ પણ એકેક ફૂટ રહે એવા કડકા કરેતો બધા મ-ળીને ૮ થાય, પણ તે દરેક ત્રણ ફૂટ જાડા હોય. માટે દરેક એક એક ફૂટ જાડો રહે એવા કરેતો બધા મળીને દરેક એક ફૂટ લાંબો, એક ફૂટ પહોળોને એક ફૂટ જાડો એવા ૨૪ કડકા થાય. ને એ ૨૪ તે ૪ ફૂટ લંબાઇ ૨ ફૂટ પહોળાઇ ને ત્રણ ફૂટ જાડાઇના ગુણાકારની બરોબર થાય છે.

ઘન આકારનું ઘનફળ તેની એક બાજુના ઘનની બ-રોબર છે. કેમકે ઘન આકારની લંબાઇ પહોળાઈ ને જાડાઇ સરખી છે, માટે એ ત્રણેનો ગુણાકાર તે એક બાજુના ઘ-નની બરોબર થવો જોઇએ. ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થનું ઘ-નફળ કહાડવું હોયતો પાયાના ક્ષેત્રફળને ઉંચાઇએ ગુણવા. કેમકે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થ એ કાટખુણ પ્રીઝમનું અ-રધ છે ને તેનું ઘનફળ તેની લંબાઇ×પહોળાઇ×ઉંચાઈ છે એટલે એક બાજુના ક્ષેત્રફળને ઉંચાઇએ ગુણવાથી આવે છે. ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થના પાયાનું ક્ષેત્રફળ તે તેની લંબાઇ ને પહોળાઇના ગુણાકારનું અરધ છે, માટે તેને ઉં-ચાઇએ ગુણીશું તો ગુણાકાર કાટખુણ પ્રીઝમના ઘનફળના અરધ જેટલો આવશે, એટલે તે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થનું એટલે કાટખુણ પ્રીઝમના અર્ધનું ઘનફળ થવું જોઇએ.

ગોળ થાંભલાનું ઘનફળ તેના પાયાના ક્ષેત્રફળને ઉંચાઈએ ગુણવાથી આવે છે, કેમકે એ ગોળ થાંભલો બધેથી સરખો હોવાને લીધે પાયાના ક્ષેત્રફળ જેટલુંજ માપ છેવટસુધી હોય છે.

કોઇ શંકુ આકારનું ઘનફળ કહાડવું હોયતો તેના પા-યાના ક્ષેત્રફળને ઉંચાઇએ ગુણી ત્રણે ભાગવા, કેમકે ત્રિ-કોણાકાર નક્કર પદાર્થ જેમ કાટખુણ પ્રીઝમનો અરધોભાગ છે તેમ શંકુ આકાર નક્કર પદાર્થ કાટખુણ પ્રીઝમનો ત્રિ-જો ભાગ છે. એટલે કાટખુણ પ્રીઝમના ત્રિકોણાકાર નક્કર ભાગ કરીએ તો ૨, ને શંકુ આકાર નક્કર ભાગ કરીએ તો

ત્રણ થાય છે. *

ટીકા–શંકુનો પાયો ગોળજ હોય એમ નથી. ત્રિકોણાકાર, ચોરસ વગેરે જાતનો પણ હોય. માટે જે જાતનોપાયો હોય તેનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રીતે ક્ષેત્રફળ કહાડી ઉંચાઈએ ગુણવાથી તે શંકુનું ઘનફળ આવશે,

ગોળાનું ઘનફળ.

બધી તરફથી સરખો ગોળ હોય તેને ગોળો કહે છે. એ ગોળો બંને તરફથી ખુલ્લા *એવા એક ભુંગળામાં રહેતો તે ભુંગળાના ઘનફળનું $\frac{2}{3}$ ઘનફળ એ ગોળાનું થાયછે એવા ભુંગળાને સીલીંડર કહેછે. એ સીલીંડરની ઊંચાઈ અને ગોળાનો વ્યાસ સરખો હોવો જોઈએ. તેમજ સીલીંડરના ગોળનો પરીઘ ને ગોળાનો પરીઘ પણ સરખો હોયછે.

ગોળાનું ઘનફળ કહાડવું હોય તો ગોળાના પૃષ્ટફળને આંસે (વ્યાસે) ગુણી તેના $\frac{1}{6}$ લેવા અથવા ૬ એ ભાગવા.

કારણ—સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ કહાડવું હોયતો સીલીંડરના પરીઘને ઉંચાઇએ ગુણવા. અથવા વ્યાસના વર્ગને ૩·૧૪૧૬ એ ગુણવા. કેમકે ઉંચાઈ ને વ્યાસ સરખાં છે. પણ વ્યાસના વર્ગને ૩·૧૪૧૬ એ ગુણી ચારે ભાગે તો સીલીંડરના પાયાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ આવે માટે $\frac{\text{વ્યાસ}^{2}\times ૩\cdot૧૪૧૬}{૪}$ =સીલીંડરના પાયાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ. તેને ઉંચાઇએ અથવા વ્યાસે ગુણે તો તે સીલીંડરનું ઘનફળ આવે. માટે

*આ બાબતની સિદ્ધતા નક્કર ભૂમીતિથી થઇ શકે છે, માટે તે આ જગાએ લખવી નકામી છે. પણ એક કાટખુણ પ્રીઝમ લઇ તેના ત્રિકોણાકાર ને શંકુ આકાર નક્કર ભાગ કરી જોયાથી શીખનારની ખાતરી થશે.

† આ બાબતની સિદ્ધતા નક્કર ભૂમીતિથી થઇશકેછે.

$\frac{\text{વ્યાસ}^{૨} \times ૩·૧૪૧૬ \times \text{વ્યાસ}}{૪}$ ×વ્યાસ=સીલીંડરનું ઘનફળ, અ-થવા તેના $\frac{૨}{૩}$ તે ગોળાનું ઘનફળ. માટે $\frac{\text{વ્યાસ}^{૨} \times ૩·૧૪૧૬ \times \text{વ્યાસ}}{૪}$ ના $\frac{૨}{૩}$=વ્યાસ²×૩·૧૪૧૬×વ્યાસના $\frac{૧}{૬}$ એ ગોળાનું ઘનફળ. પણ વ્યાસ²×૩·૧૪૧૬ એ ગોળાનું પૃષ્ટફળ છે માટે ગોળાનું પૃષ્ટફળ×વ્યાસ (આંસ)ના $\frac{૧}{૬}$=ગોળાનું ઘનફળ આવે.

અથવા વ્યાસ²×૩·૧૪૧૬×વ્યાસના $\frac{૧}{૬}$ અથવા વ્યાસ³×૩·૧૪૧૬ના $\frac{૧}{૬}$ એ ગોળાનું ઘનફળ આવે પણ ૩.૧૪૧૬ ના $\frac{૧}{૬}$=·૫૨૩૬ છે માટે વ્યાસ³×·૫૨૩૬=ઘનફળ.

પરીઘ×વ્યાસ=સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ એટલેઃ—

$$\frac{\text{પરીઘ} \times \text{પરીઘ}}{૩·૧૪૧૬} = \frac{\text{પરીઘ}^{૨}}{૩·૧૪૧૬} \text{ સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ}$$

પણ $\frac{\text{પરીઘ}^{૨}}{૩·૧૪૧૬}$ ÷૪ એ સીલીંડરના પાયાના ગોળનું ક્ષેત્ર-ફળ છે તેને વ્યાસે ગુણે તો સીલીંડરનું ઘનફળ આવે માટે

$$\frac{\text{પરીઘ}^{૨}}{૩·૧૪૧૬ \times ૪} \times \text{વ્યાસ અથવા } \frac{\text{પરીઘ}^{૨}}{૩·૧૪૧૬ \times ૪} \times \frac{\text{પરીઘ}}{૩·૧૪૧૬} =$$

$\frac{\text{પરીઘ}^{૩}}{(૩·૧૪૧૬)^{૨} \times ૪}$ સીલીંડરનું ઘનફળ. તેના $\frac{૨}{૩}$ તે ગોળાનું ઘનફળ માટે $\frac{\text{પરીઘ}^{૩}}{(૩·૧૪૧૬)^{૨}}$ ના $\frac{૧}{૪}$ ના $\frac{૨}{૩}$= $\frac{\text{પરીઘ}^{૩}}{(૩·૧૪૧૬)^{૨}}$ ના $\frac{૧}{૬}$ ગોળાનું ઘનફળ.

માટે ગોળાના ઘનફળ=$\frac{\text{પરીઘ}^{૩}}{૫૯·૨૧૪૧૬}$ અથવા પરીઘના ઘનના $\frac{૧}{૫૯·૨૧૪૧૬}$ અથવા પરીઘ³×·૦૧૬૮૮

ઉપરની સિદ્ધતા બીજી રીતે કરીએતો—

ગોળાના ઘનફળ=વ્યાસ³×·૫૨૩૬ પણ વ્યાસ કરતાં પરીઘ ૩·૧૪૧૫૮૩ ગણો છે માટે વ્યાસના ઘન કરતાં પ-

ઋનો ઘન $(૩.૧૪૧૬)^3$ ગણો વધારે આવે માટે વ્યાસના ઘનને .૫૨૩૬ વડે ગુણવાના છે તેને બદલે પરીઘના ઘનને $\frac{.૫૨૩૬}{(૩.૧૪૧૬)^3}$ વડે ગુણવાના આવે પણ $\frac{.૫૨૩૬}{(૩.૧૪૧૬)^3}$ તે ૦૧૬૮૮ છે માટે વ્યાસના ઘનને .૦૧૬૮૮ ગુણવા.

પૃષ્ટફળ.

નક્કર આકૃતિઓની સપાટીના ક્ષેત્રફળને પૃષ્ટફળ કહે છે. ગોળાની સપાટી એક હોય પણ પેટીને ૬ હોય. જ્યારે ઘણી સપાટ સફાઈ હોય તો તે બધી સફાઈના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો કરવાથી તે આકૃતિનું પૃષ્ટફળ નીકળે. પેટીની છએ બાજુનું જુદું જુદું ક્ષેત્રફળ કહાડી સરવાળો કરવાથી પેટીની બધી સપાટીઓનું પૃષ્ટફળ થાય. જ્યારે લંબાઈ, ઉંચાઇ ને પહોળાઇ જુદી જુદી હોય ત્યારે એ પ્રમાણે કરવું પડે. પણ ત્રણે વાનાં સરખાં હોય તો એક તરફનું ક્ષેત્રફળ કહાડયું તેટલુંજ બધી બાજુનું હોય, માટે તે ક્ષેત્રફળના છ ગણા કરવાથી તે પદાર્થનું પૃષ્ટફળ આવે. લંબાઇ, પહોળાઇ ને ઊંચાઈ સરખાં હોય એવા પદાર્થને ઘન કહેછે. ઘનને પણ છ બાજુ હોય છે, માટે તેના એક તરફના ક્ષેત્રફળના છ ગણા કરવાથી તે ઘનનું પૃષ્ટફળ આવી રહે છે.

ગોળાનું પૃષ્ટફળ કહાડવું હોય તો તે ગોળાના વ્યાસ ને પરીઘના ગુણાકાર કરવો.

કારણ—એક ગોળાનું પૃષ્ટફળ તેને ફરતા સીલીંડરના પૃષ્ટફળની બરાબર †છે. અને સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ તેના પાયાના ગોળના પરીઘને ઉંચાઇએ ગુણવાથી આવે છે. આ સિદ્ધતા તે ભુંગળાને ઉકેલી જોયાથી માલમ પડશે. કેમકે એ ભુંગળાને ઉકેલ્યાથી ચોખંડું થશે તેથી તેની ઉંચાઈ તે લંબાઇ. ને પાયાના ગોળનો પરીઘ તે પહોળાઇ થશે. એટલે તે ભુંગળાના પત્રાનું ક્ષેત્રફળ, લંબાઇ ને પહોળાઇના ગુણા-

---

†નક્કર ભૂમીતિની સહાયતાથી આ સિદ્ધતા સિદ્ધ થશે,

કાર બરાબર છે એવું આપણે પાછળ સિદ્ધ કરી ગયા, માટે તે પહોળાઇ એ પરીઘ ને ઉંચાઇ એટલે વ્યાસનો ગુણાકાર તે સીલીંડરનું ક્ષેત્રફળ, ને તેટલુંજ ક્ષેત્રફળ એ સીલીંડરમાં માઈ રહે એવા ગોળાનું હોય છે. માટે તે ગોળાના વ્યાસ ને પરીઘનો ગુણાકાર તે ગોળાનું પૃષ્ટફળ થશે.

એટલે ગોળાના પૃષ્ટફળ=પરીઘ×વ્યાસ

અથવા ॥ ॥ $= \frac{\text{પરીઘ}\times\text{પરીઘ}}{3\cdot1416} = \frac{\text{પરીઘ}^2}{3\cdot1416}$.

અથવા ॥ ॥ $=$ વ્યાસ$\times3\cdot1416\times$વ્યાસ$=$વ્યાસ^2 $\times3\cdot1416$

શંકુનું પૃષ્ટફળ કહાડવું હોય તો તેના પાયાના પરીઘને શંકુની તીરકસ બાજુના ગુણાકારનું અર્ધ કરવું, કેમકે શંકુ ગોળ હશે તો તેનું પૃષ્ટફળ તેવા ગોળ થાંભલાના પૃષ્ટફળથી અથવા બાજુવાળો હશેતો તેનાં પૃષ્ટોનું પૃષ્ટફળ તેવા પ્રીઝમના પૃષ્ટફળથી અરધું થશે. પછી તેમાં પાયાનું પૃષ્ટફળ ઉમેરવાનું હોયતો જુદું ઉમેરવું.

ગોળ થાંભલાનું પૃષ્ટફળ કહાડવું હોયતો તેના પાયાના પરીઘને ઉંચાઈએ ગુણવા. પણ તેમાં પાયાનું ક્ષેત્રફળ ઉમેરવું હોયતો તે કહાડીને ઉમેરવું. આની સિદ્ધતા સીલીંડરના પૃષ્ટફળની સિદ્ધતા જેવીજ છે.

મિશ્રરાશિ.

એક જાતની જુદા જુદા ભાવની ચીજો મિશ્ર કરી તે શા ભાવે વેચવાથી સરભર થાય, કિંવા અમુક નફો મળે તે ખોળી કહાડવાની રીતને મિશ્રરાશિ કહેછે.

એ રીતના દાખલા જુદી જુદી ત્રિરાશિઓ કરવાથી થાય છે પણ તે સાંકળરીતિ કે પંચરાશિની રીતે ગણવાથી વખત ને મહેનત વધારે પડેછે તે બચાવવા માટે મિશ્રરાશિછે.

જુદા જુદા ભાવની વસ્તુઓનું વજન આપ્યું હોય

તે પરથી મિશ્રનો દર કહાડવો હોય તો દરેક ભાવને વજનનો ગુણાકાર કરવો. એ ગુણાકારોના સરવાળાને બધા વજનના સરવાળાએ ભાગવા તે જવાબ. એ જવાબ સરભર ભાવ આવશે એટલે નફો તોટો ન જાય એવો ભાવ આવશે. પણ નફો લેવો હોયતો બધા ગુણાકારોના સરવાળામાં તેટલો નફો મેળવીને બધા વજનના સરવાળાએ ભાગવા.

કારણ—એક ભાવનું વજન આપ્યું હોય તે ભાવને વજનનો ગુણાકાર તે, તે વજનની કીમત થશે. જેમકે ૪રૂ ના ભાવનું ૫ મણ એટલે ૪×૫=૨૦ એ ૫ મણની કીમત થઇ. તેજ પ્રમાણે દરેક ભાવને વજનનો ગુણાકાર તે વજનની કીમત આવશે એટલે બધા ગુણાકારોનો સરવાળો તે, બધા વજનના સરવાળાની કુલ કીમત થઈ. માટે તે કુલ કીમતને કુલ વજને ભાગ્યાતો મિશ્ર એક મણની કીમત આવશે.

જુદા જુદા ભાવની વસ્તુઓનું મિશ્ર અમુક ભાવે પાડવું હોય તો તે વસ્તુઓ કેટ કેટલી લેવી એમ કહેતો—તે બધા ભાવને ઉભી હારમાં લખી જે મિશ્રનો ભાવ હોય તે એ બધા ભાવની ડાબી બાજુએ લખવો. પછી તે મિશ્ર ભાવ કરતાં એક ભાવ ઓછો ને એક વત્તો ભાવ લેઇ સરખાવવા એટલે મિશ્રને ઓછા ભાવની બાદબાકી વત્તા ભાવ આગળ અને મિશ્રને વત્તા ભાવની બાદબાકી ઓછા ભાવ આગળ એમ લખવું. એજ રીતે બીજા બે ભાવ લેઇ લખવું. એ પ્રમાણે મિશ્ર કરતાં એક ઓછો ને એક વત્તો ભાવ લેવો. જો મિશ્ર કરતાં એક ભાવ ઓછો ને બાકીના બધા ભાવ વત્તા હોય તો તે ઓછો ભાવ દરેક વત્તા ભાવ સાથે સરખાવવામાં આવશે તેમજ એક વત્તો ને બીજા ઓછા હોય તો પણ તેમજ થશે. મતલબ કે મિશ્રના ભાવ કરતાં એક વત્તો કે એક ઓછો ભાવ તો હોવાજ જોઇએ. બધા વત્તા કે બધા ઓછા ભાવ હોયજ નહીં. પછી દરેક ભાવ આગળ જે

બાદબાકીઓ મૂકી હોય તેનો સરવાળો લેવો. એ દરેક સરવાળા જેટલું દરેક ભાવનું વજન આવશે.

કારણ-એક ભાવ ઓછો અને એક ભાવ વધો લેવાથી ઓછે ભાવે લીધેલા માલ મિશ્રને ભાવે વેચવાથી જેટલો નફો રહે છે તેટલોજ ગોટ વધે ભાવે લેઇ મિશ્રને ભાવે વેચવાથી જાય છે. તેથી દરેક વખતે સરાબર થઇ રહે છે.

ટીકા-આવા દાખલાના જવાબ એક કરતાં વધારે આવશે, કેમકે એક જવાબ કહાડ્યા પછી તેને કોઇ પણ સંખ્યાએ ગુણવાથી અથવા ભાગવાથી નફો નુકશાન બરાબર રહે છે.

પણ ઉપલી જાતના હિસાબમાં કોઈ અમુક જાતના ભાવનું વજન આપ્યું હોય તો તે પ્રમાણમાં બીજા ભાવનું વજન, લેવું જોઈએ. એટલે ઉપરની રીત પ્રમાણે દરેક ભાવનું વજન કહાડ્યા પછી જે ભાવનું વજન આપ્યું હોય તે વજન, તે ભાવનું જેટલું વજન આવે તે કરતાં જેટલો ગણું વત્તું કે ઓછું હોય, તેટલા ગણું વત્તું કે ઓછું દરેક ભાવનું લેવું જોઇએ એ ઉઘાડુંજ છે.

તેમજ દરેક જાતનું કેટકેટલું વજન લેવું કે કુલ મિશ્રનું અમુક વજન થાય એમ કહેલું હોય તો ઉપરની રીતે દરેક ભાવનું વજન કહાડી પછી તેનો સરવાળો કરવો. એ સરવાળા કરતાં કુલ આપેલું વજન જેટલા ગણું હોય તેટલા ગણું દરેક ભાવનું વધારે લેવું જોઈએ એ પણ સ્પષ્ટછે.

શ્રેઢી.

જો કેટલીક સંખ્યા અમુક નિયમ પ્રમાણે વધે અથવા ઘટે તો તે સંખ્યાના જથાને શ્રેઢી કહે છે. એ શ્રેઢી બે પ્રકારની છે. ગણિત પ્રમાણ ને ભૂમિતિ પ્રમાણ. જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યા કોઈ સરખે અંતરે વધે અથવા ઘટે ત્યારે તે શ્રેઢીને ગણિત પ્રમાણ શ્રેઢી કહે છે; ને જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યાઓ પહેલી કરતાં બીજી ને બીજી કરતાં ત્રીજી અમુક ગણી વધે

અથવા ઘટે. ત્યારે તે શ્રેઢીને ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી કહેછે. જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યા એક કરતાં બીજી વધારે અથવા ચડતી હોય ત્યારે તેને ચડતી શ્રેઢી, ને શ્રેઢીના સંખ્યા એક કરતાં બીજી ઓછી અથવા ઉતરતી હોય ત્યારે તેને ઉતરતી શ્રેઢી કહે છે.

ગણિત પ્રમાણ શ્રેઢી.

શ્રેઢીમાં પહેલું પદ હોય તેને આદિપદ, છેલ્લા પદને અંતપદ, એક કરતાં બીજું જેટલું કે જેટલા ગણું વધારે હોય તેને ઉત્તર કે ગુણોત્તર, શ્રેઢીમાં જેટલી સંખ્યા હોય તેને પદ સંખ્યા કે ગચ્છ અને એ બધી સંખ્યાના સરવાળાને સર્વધન કહે છે. મતલબ શ્રેઢીમાં આદિ પદ, અંતપદ, ઉત્તર, ગચ્છ, ને સર્વધન એ પાંચવાનાં હોય છે. એ પાંચમાંનાં કોઇ પણ ત્રણ આપ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનાં નીકળી શકે છે. ૨, ૫, ૮, ૧૧, ૧૪. ૧૭, ૨૦ એ સાત સંખ્યાની શ્રેઢીમાં ૨ આદિપદ, ૨૦ અંતપદ, ૩ ઉત્તર, ૭ ગચ્છ ને એ બધીનો સરવાળો ૭૭ એ સર્વધન છે.

શ્રેઢીનાં પાંચમાંનાં ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તો બાકીનાં કહાડવાની રીતો છે, તે સમજાવતા પહેલાં શ્રેઢીની સંખ્યાના ગુણ જાણવા જોઇએ. એ ગુણ સમજ્યાથી શ્રેઢીના રીતોનાં કારણ જલદીથી સમજાશે.

૧ શ્રેઢીની દરેક આગલી સંખ્યા તેની પહેલાંની સંખ્યા કરતાં અમુક સંખ્યા વધારે હોય છે. એટલે પહેલી સંખ્યામાં ઉત્તર મેળવીએ તો બીજી સંખ્યા, અને બીજીમાં ઉત્તર મેળવીએ અથવા પહેલીમાં ઉત્તર બે વાર મેળવીએ એટલી ત્રીજી સંખ્યા હોય છે. ત્રીજીમાં ઉત્તર મેળવીએ અથવા પહેલીમાં ઉત્તર ત્રણ વાર મેળવીએ એટલી ચોથી સંખ્યા હોય છે. એ પ્રમાણે જેટલામી સંખ્યા કહાડવાની હોય તેમાંથી એક બાદ કરીએ તેટલી વાર ઉત્તર પહેલીમાં મેળવીએ તેટલી તે સંખ્યા હોય છે. જેમકે ઉપલા શ્રેઢીમાં પહેલો ૨ છે ને દશમી

સંખ્યા કહાડવી હોય તો ૧૦−૧=૯ વાર ઉત્તર લેઇએ તો ૨૭ થાય તેટલામાં ૨ મેળવીએ તો ૨૯ એ દશમી સંખ્યા આવે. પણ જો ઉતરતી શ્રેઢી હોય તો પહેલી સંખ્યામાંથી જેટલામી સંખ્યા કહાડવી હોય તેમાંથી એક ઓછો એટલી વાર ઉત્તર બાદ કરવાથી આવે. કેમકે ઉપરનાજ દાખલાને ઉલટાવીએ ને પહેલી સંખ્યા ૨૯ લેઇએ ને દશમી સંખ્યા કહાડવી હોય તો ૧૦−૧=૯ને ઉત્તર ગણા લેઈ ૨૯માંથીબાદ કરીશું તો દશમી સંખ્યા ૨ આવશે. એટલે ચઢતી શ્રેઢીમાં પહેલી સંખ્યામાં ઉમેરવા ને ઉતરતી શ્રેઢીમાં બાદ કરવાથી તે સંખ્યા નીકળશે. હવે જેટલામી સંખ્યા કહાડવી હોય તેને અંતપદ ગણીએ તો ચઢતી શ્રેઢીમાં અંતપદ=આદિપદ+(ગચ્છ−૧)×ઉત્તર આ પ્રમાણે કોઠો થયો. પણ ઉતરતી શ્રેઢીમાં અંતપદ=આદિપદ−(ગચ્છ−૧) × ઉત્તર આવો કોઠો થયો.

૨ વળી ગચ્છ−૧ને ઉત્તરે ગુણી આદિપદમાં ઉમેરવાથી અંતપદ આવે છે. એ રીત ઉપરથી બે સંખ્યાની વચમાં ગમે તેટલાં સરખા અંતરનાં પદ મૂકવાથી ઉત્તર કેટલું રાખવું તે કહાડી શકાયછે. કેમકે(ગચ્છ−૧)×ઉત્તર+આદિપદ=અંતપદ છે. હવે આદિપદને અંતપદ આપ્યું હોય.તો અંતપદમાંથીઆદિપદ બાદ કરીશું તે (ગચ્છ−૧ ×ઉત્તર રહેશે. તેને ગચ્છ−૧ વડે ભાગીએ તો ઉત્તર આવે. ઉપલાજ દાખલામાં ૨ને ૨૯ની વચમાં આઠ પદ મૂકવાં હોય તો કુલ ૧૦ ગચ્છ સંખ્યાથઈ. તેમાંથી એક બાદ કર્યો તો ૯ રહ્યા તેણે ૨૯−૨ને ભાગ્યા તો ૩ ઉત્તર આવ્યા અથવા ઉતરતી શ્રેઢી હોય તો આદિપદમાંથી અંતપદ બાદ કરી તેને નવે ભાગીશું તો પણ ૩ ઉત્તર આવશે. એટલે ઉત્તર કહાડવું હોય તો ચઢતા શ્રેઢીમાં $\frac{\text{અંતપદ}-\text{આદિપદ}}{\text{ગચ્છ}-૧}$ અને ઉત્તરતી શ્રેઢીમાં $\frac{\text{આદિપદ}-\text{અંતપદ}}{\text{ગચ્છ}-૧}$

૩. જો ઉપરનીજ શ્રેઢીમાં ગચ્છ સંખ્યા કહાડવી હોય

તેાપણ નીકળશે. કેમકે ઉત્તરને ગચ્છ−૧ ગુણી આદિપદમાં મેળવ્યાથી અંતપદ આવે છે. માટે અંતપદમાંથી આદિપદ બાદ કરી ઉત્તરે ભાગીએ તેા ગચ્છ−૧ આવે. માટે તે ભાગાકારમાં એક મેળવ્યાથી ગચ્છ આવશે. જેમકે ઉપરનીજ શ્રેઢીમાં અંતપદ−આદિપદ=૨૭ છે તેને ઉત્તર ૩ ભાગ્યા તેા ૯ આવ્યા એ ગચ્છ−૧નેા બરાેબર છે માટે ૯+૧=ગચ્છઆવશે.

૪ એજ ઉપરથી આદિપદ કહાડવું હાેય તેા પણ નીકળશે કેમકે (ગચ્છ−૧)×ઉત્તર આદિપદમાં મેળવવાથી અંતપદ આવે છે. માટે અંતપદમાંથી (ગચ્છ−૧)×ઉત્તર બાદ કરવાથી આદિપદ આવશેએટલે આદિપદ=અંતપદ−(ગચ્છ−૧)×ઉત્તર.

૫ વળી શ્રેઢીમાં ત્રણ પદ હાેય તેા પેહેલા ને છેલ્લાનેા સરવાળેા વચલાની બમણાઈ બરાબર થાય. ૨, ૫, ૮ આ શ્રેઢીમાં ૨+૮=૫×૨ છે માટે વચલું પદ કહાડવું હાેય તેા, પહેલા ને છેલ્લના સરવાળાને બેએ ભાગવાથી નીકળશે. પણ એક કરતાં વધારે પદાે બે સંખ્યાની વચમાં મૂકવાં હાેય તેા− આપેલી બે સંખ્યામાંની એક આદિપદ અને બીજી અંતપદ થશે. એ ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું જોઇએ જેમકે ૨ને ૨૯ની વચમાં આઠ પદ મૂકવાં હાેય તેા કુલ દશ પદસંખ્યા થશે. ને તે ઉપરથી પાછળ કહ્યા પ્રમાણે ઉત્તર કહાડયું તેા ત્રણ આવશે. માટે પહેલી સંખ્યા ૨તેા બીજી ૫,ત્રીજી ૮, ચાેથી ૧૧, પાંચમી ૧૪,છઠી ૧૭,સાતમી ૨૦,આઠમી ૨૩,નવમી ૨૬ આવશે.

૬ શ્રેઢીમાંની પહેલીને છેલ્લીનેા સરવાળેા બીજી ને છેલ્લીની પહેલીના સરવાળા બરાબર છે. કેમકે પહેલી કરતાંબીજી જેટલી વધારે હાેય તેટલીજ છેલ્લીની પહેલી કરતાં છેલ્લી વધારે હાેય છે. તેમજ વળી પહેલી ને છેલ્લીનેા સરવાળેા, પહેલેથી ત્રીજીને છેલ્લેથી ત્રીજી લેઇએ તેના સરવાળા બરાબર છે. એ પ્રમાણે પહેલેથી જેટલામી સંખ્યા લેઇએ તેટલામીજ છેલ્લેથી લેઇ સરવાળેા કરીશું તે, આદિ અંતના સરવાળા બરાબર થશે. એ પ્રમાણે પદ સંખ્યાનાં જેટલાં જેે-

કરીશું તે જોડકાંનો સરવાળો સરખો થશે. જેમકે ૨, ૫, ૮, ૧૧, ૧૪, ૧૭, ૨૦, ૨૩, ૨૬, ૨૯ આ દશ પદ સંખ્યાનાં ૨ને ૨૯, ૫ને ૨૬, ૮ને ૨૩, ૧૧ને ૨૦, ૧૪ને ૧૭, એવાં પાંચ જોડકાં થશે તે દરેકનો સરવાળો ૩૧ થશે. માટે ૩૧ને પાંચ ગણુા કરીશું તો એ દશ સંખ્યાનો સરવાળો થવાનો. એટલે ૩૧×૫=૧૫૫ એ દશે પદનો સરવાળો અથવા સર્વધન આવ્યું. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઈ શ્રેઢીનો સરવાળો કહાડવો હોય તો આદિ ને અંતના સરવાળાને પદ સંખ્યાનાં જોડકાંની સંખ્યાએ ગુણવા એટલે સર્વધન=(આદિપદ+અંતપદ)× ગચ્છ/૨. પણ જો અંતપદ ન આપ્યું હોય તો પહેલી રીત પ્રમાણે અંતપદ કહાડીને પછી ઉપરની રીતે સર્વધન કહાડવું.

૭ પણું જો આદિપદ ૧ એક હોયને ઉત્તર બે હોય તો ગમે તેટલી સંખ્યાનું સર્વધન તે સંખ્યાના વર્ગ જેટલું આવશે. જેમકે આદિપદ ૧, ઉત્તર ૨ છે તો વીશ સંખ્યાનું સર્વધન વીશના વર્ગ જેટલું ૪૦૦ આવશે.

૮ તેમજ આદિપદ કરતાં ઉત્તર બમણું હોય તો જેટલી સંખ્યાનું સર્વધન કહાડવું હોય તે સંખ્યાના વર્ગને આદિપદે ગુણવાથી આવશે. જેમકે આદિપદ ૪ ને ઉત્તર ૮ છે તો વીશ સંખ્યાનું સર્વધન ૨૦ × ૪ = ૧૬૦૦ આવશે. ઉપરની સાતમી ને આઠમી રીતની સિદ્ધતા છઠી રીતે સર્વધન કહાડી જોયાથી માલમ પડશે. કેમકે ઉપરની રીતે અંતપદ =આદિપદ+ (ગચ્છ−૧)×ઉત્તર, માટે અંતપદ=૪+(૨૦−૧) ×૮=૪+૧૫૨=૧૫૬. તે ઉપરથી સર્વધન=(આદિ+અંત)× ગચ્છ/૨ =(૪+૧૫૬)×૨૦/૨=૧૬૦×૧૦=૧૬૦૦

ઉપર જે કોઠાઓ સમજાવ્યા તે આ નીચે સામટા લખ્યા છે કે યાદ કરવાને સુગમ પડે.

૧ ચઢતી શ્રેઢીમાં અંતપદ =આદિપદ+(ગચ્છ−૧)×ઉત્તર.
ઉતરતી શ્રેઢીમાં અંતપદ=આદિપદ−[ગચ્છ−૧]×ઉત્તર.

૨ ચઢતી શ્રેઢીમાં ઉત્તર $= \frac{\text{અંતપદ}-\text{આદિપદ}}{\text{ગચ્છ}-1}$

ઉતરતી શ્રેઢીમાં ઉત્તર $= \frac{\text{આદિપદ}-\text{અંતપદ}}{\text{ગચ્છ}-1}$

૩ ચઢતી શ્રેઢીમાં ગચ્છ $= \frac{\text{અંતપદ}-\text{આદિપદ}}{\text{ઉત્તર}} + 1$

ઉતરતી શ્રેઢીમાં ગચ્છ $= \frac{\text{આદિપદ}-\text{અંતપદ}}{\text{ઉત્તર}} + 1$

૪ ચઢતી શ્રેઢીમાં આદિપદ=અંતપદ−(ગચ્છ−૧)×ઉત્તર.
ઉતરતી શ્રેઢીમાં આદિપદ=અંતપદ+(ગચ્છ−૧)×ઉત્તર.

૫ ચઢતી શ્રેઢીનાં સર્વધન=(આદિપદ+અંતપદ)$\times \frac{\text{ગચ્છ}}{2}$

ઉતરતી શ્રેઢીમાં સર્વધન એટલુંજ આવશે તે એજ રીતે નીકળશે.

શ્રેઢીનાં પાંચ વાનાંમાંથી કોઈપણ એક કહાડવું હોય તો ઉપરની રીતોની મદદથી નીકળશે. પણ ઉપરની રીતમાં જરૂર પડે એટલાં પદ ન આપ્યાં હોય તો માગેલું પદ કહાડતાં લગાર અડચણ પડે છે. માટે એ ઉપલા પાંચ કોઠાની મદદથી દરેક વાનું કહાડવાને જુદી જુદી રીતે બીજા કોઠા આ નીચે ઉત્પન્ન કરી બતાવ્યા છે, એ કોઠા શી રીતે ઉત્પન્ન થયા છે. તે સમજ્યાથી તે કોઠા જલદી યાદ રહેશે, અને ભૂલી જશે, તો ફરીને ઉત્પન્ન કરી શકશે.

૬. જો આદિ.† ગચ્છ ને સર્વધન ઉપરથી અંત કહાડવું હોયતો*

---

† કોઠા લખવામાં લંબાણ ન થાય, માટે સર્વધનને બદલે **સ.** આદિપદને બદલે **આ.** અંતપદને બદલે **અં** ગચ્છ ને બદલે ગ. ને ઉત્તરને બદલે ઉ. લખેલું છે.

* આ સિદ્ધતા માત્ર સમીકરણ શીખેલાજ સમજી શકે તેવી છે, તોપણ તે શીખેલા સમજી શકે, માટે આપીછે.

આપણે છઠ્ઠી કલમમાં કહી ગયા કે આદિપદ ને અંતપદના સરવાળાને પદ સંખ્યાના અર્ધે ગુણીએ, તો સર્વધન આવે. એટલે પદસંખ્યાએ ગુણે તો સર્વધનના બમણા આવે. માટે સર્વધનના બમણાને પદ સંખ્યાએ ભાગે તો આદીપદ ને અંતપદનો સરવાળો આવે તેમાંથી આદીપદ બાદ કરેતો અંતપદ રહે. એટલે અંતપદ=૨ $\frac{\text{સર્વધન}}{\text{પદસંખ્યા}}$ − આદિપદ

ઉતરતી શ્રેઢીમાં પણ એજ કોઠો કામ લાગશે, કેમ કે ઉતરતી શ્રેઢીમાં અંતપદ નાનું હોય, તેમ બાદ કરવાનું આદિપદ મોટું હોયજ.

૭. વળી ઉત્તર,ગચ્છ ને સર્વધન ઉપરથી અંતપદ કહાડવું હોયતો—

$\text{અં.}=\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ.}}-\text{આ.}$ ઉપર સિદ્ધ કરી ગયા. પણ આદિપદ આપ્યું નથી. માટે ભાગનો ચોથો કોઠો આદિ પદને બદલે મૂક્યાથી $\text{અં.}=\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ.}}-(\text{અં.}-\text{ગ.}-\text{૧}\times\text{ઉ})$ કૌંસ છોડવ્યાથી $\text{અં.}=\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ.}}-\text{અં.}+(\text{ગ}-\text{૧}\times\text{ઉ}.$ અંતપદ સ્થળાંત્તર કર્યાથી $\text{૨અં}=\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ.}}+(\text{ગ.}-\text{૧})\times\text{ઉ}\quad\therefore\quad\text{અં}=\frac{\frac{\text{૨ સ}}{\text{ગ}}+(\text{ગ.}-\text{૧})\times\text{ઉ.}}{\text{૨}}$

ઉતરતીશ્રેઢીમાં $\text{અં.}=\frac{\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ.}}-\text{ગ.}-\text{૧}\times\text{ઉ.}}{\text{૨}}$

૮. આદિપદ,સર્વધન અને ઉત્તર ઉપરથી અંતપદ કહાડવું હોયતો—

૬ઠ્ઠા કોઠા પ્રમાણે $\text{અં}=\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ}}-\text{આ.}$ પણ $\text{ગ}=\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ઉ}}+\text{૧}$ છે તે ગ.ને બદલે લખ્યા તો $\text{અં}=\frac{\text{૨ સ.}}{\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ઉ}}+\text{૧}}-\text{આ.}$ માટે $\text{અં}=\frac{\text{૨ સઉ}}{\text{અં}-\text{આ}+\text{ઉ}}-\text{આ.}$ છેદ ઉરાડયા તો $\text{અં.}^{\text{૨}}-\text{અંઆ}+\text{અંઉ}=\text{૨ સઉ}-\text{અંઆ}+\text{આ}^{\text{૨}}-\text{આઉ}.$ બન્ને તરફ $\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ}^{\text{૨}}$ ઉમેર્યા તો $\text{અં}^{\text{૨}}+\text{અંઉ}+\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ}^{\text{૨}}=\text{૨ સઉ}+\text{આ}^{\text{૨}}-\text{આઉ}+\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ}^{\text{૨}}$ જમણીતરફ ઉ ગુણક કહાડયો તો $\text{અં}^{\text{૨}}+\text{અંઉ}+\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ}^{\text{૨}}=\text{આ}^{\text{૨}}+\text{ઉ}(\text{૨ સ}-\text{આ}+\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ}).$ બંનેતરફનું વર્ગ-

મૂળ કહાડયું તો અં$+\frac{१}{२}$ ઉ$=\sqrt{\text{આ}^{२}+\text{ઉ}(२\text{સ}-\text{આ}+\frac{१}{४}\text{ઉ})}$. $\frac{१}{२}$ઉ
સ્થળાંતર કર્યાથી અં$=\sqrt{\text{આ}^{२}+\text{ઉ}(२\text{સ}-\text{આ}+\frac{१}{४}\text{ઉ})}-\frac{१}{२}$ઉ જ.
૯. સર્વધન અંતપદ અને ગચ્છઉપરથી આદિપદકહાડવું હોયતો–
સ.$=$(આ.$+$અં.)$\times\frac{\text{ગ.}}{२}$ છે. માટે ૨$\times$સ.$=$(આ$+$અં.)$\times$ગ. આવે.
જો બંને બાજુને ગચ્છે ભાગીએ તો આ. $+$ અં.$=$૨ $\frac{\text{સ.}}{\text{ગ.}}$ થાય.
બંનેમાંથી અં. બાદ કરીએતો આ.$=\frac{२\times\text{સ.}}{\text{ગ.}}-$અં. જવાબ.
૧૦ પણ સર્વધન ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કહાડવું
હોય તો-ઉપર સિદ્ધ કર્યાપ્રમાણે આ.$=\frac{२\times\text{સ.}}{\text{ગ.}}-$અં. છે. તેમાં
અંતપદને બદલે અંતપદની કિંમત લખીએ તો આ.$=\frac{२\times\text{સ.}}{\text{ગ.}}$
$-\frac{२\text{ સ.}}{\text{ગ.}}+\frac{(\text{ગ.}-१)\times\text{ઉ.}}{२}$ માટે આ.$=\frac{२\text{ સ.}}{\text{ગ.}}-\frac{(\text{ગ.}-१)\times\text{ઉ.}}{२}$ જવાબ.
૧૧ વળી અંત, સર્વધનઅને ઉત્તર ઉપરથી આદિપદકહાડવું હોય
તો ઉ$=\frac{\text{અં}^{२}-\text{આ}^{२}}{२\text{સ}-\text{અં}-\text{આ}}$ છેદ ઉરાડયાથી ૨સઉ$-$અંઉ$-$આઉ$=$અં$^{२}-$
આ^{२} સ્થળાંતરથી આ$^{२}-$આઉ$=$અં$^{२}+$અંઉ$-$૨સઉ તેમાં બંને
તરફ $\frac{१}{४}$ ઉ^{२} ઉમેર્યાથી.
આ$^{२}-$આઉ$+\frac{\text{ઉ}^{२}}{४}=$અં$^{२}+$અંઉ$-$૨સઉ$+\frac{\text{ઉ}^{२}}{४}$ જમણી તરફ ઉ
ગુણક કાહાડયાથી આ$^{२}-$આઉ$+\frac{\text{ઉ}^{२}}{४}=$અં$^{२}+$ઉ(અં$-$૨સ$+\frac{\text{ઉ}}{४}$)
બંનેતરફનું વર્ગમૂળ કહાડયુતો આ$-\frac{\text{ઉ}}{२}=\sqrt{\text{અં}^{२}+\text{ઉ}(\text{અં}-२\text{સ}+\frac{\text{ઉ}}{४})}$
સ્થળાંતર કર્યાથી આ$=\sqrt{\text{અં}^{२}+\text{ઉ}(\text{અં}-२\text{સ}+\frac{\text{ઉ}}{४})}+\frac{\text{ઉ}}{२}$
૧૨ આદિ, ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો
પાંચમા કોઠા પ્રમાણે સ$=$(આ.$+$અં.)$\frac{\text{ગ.}}{२}$ આમાં અંતપદની
પહેલાકોઠાપ્રમાણે કિંમતલખી તોસ$=$[આ$+$આ$+$(ગ.$-$૧)ઉ]$\frac{\text{ગ.}}{२}$
તેથી. સ$=$[૨ આદિ$+$(ગચ્છ$-$૧)ઉત્તર] $\frac{\text{ગ.}}{२}$ જવાબ.
૧૩ અંત, ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો.
પાંચમા કોઠા પ્રમાણે સર્વધન$=$(આદિ$+$અંત) $\frac{\text{ગ.}}{२}$ એમાં આદિ-

પદની કિંમત ચોથાકોઠા પ્રમાણે લખી. તો $\text{સ}=[\text{અં}-(\text{ગ}-૧)\text{ઉ}+\text{અં}.]\frac{\text{ગ}}{૨}$ તેથી $\text{સ}=[૨\ \text{અંત}-(\text{ગચ્છ}-૧)\text{ઉત્તર}]\frac{\text{ગ}}{૨}$ જવાબ.

૧૪ આદિ, અંત અને ઉત્તર ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો— ૫મા કોઠા પ્રમાણે $\text{સર્વ}=(\text{અં}+\text{આ})\frac{\text{ગ}}{૨}$ તેમાં ત્રીજા કોઠા પ્રમાણે ગચ્છને બદલે તેની કિંમત લખી, તો—

$$\text{સ}=\frac{(\text{અં}+\text{આ})\left(\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ઉ}}+૧\right)}{૨}$$

ગુણી નાખ્યા તો $\text{સ}=\frac{\text{અં}^૨-\text{આ}^૨}{૨\text{ઉ}}+\frac{\text{અં}+\text{આ}}{૨}$ જવાબ.

૧૫ આદી, સર્વધન અને ગચ્છ ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોયતો. ૨ જા કોઠા પ્રમાણે $\text{ઉત્તર}=\frac{\text{અં}.-\text{આ}.}{\text{ગચ્છ}-૧}$ ૬ઠા કોઠા પ્રમાણે અંત પદની કીમત લખીતો $\text{ઉત્તર}=\frac{\frac{૨\text{સ}}{\text{ગ}}-\text{આદિ}-\text{આદિ}.}{\text{ગ}-૧}$

તેથી $\text{ઉત્તર}=\frac{\frac{૨\text{સ}}{\text{ગ}}-૨\text{આ}}{\text{ગ}-૧}$ જવાબ.

૧૬ સર્વધન, ગચ્છ અને અંતપદ ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોયતો તો ઉપરના ૧૫મા કોઠાપ્રમાણે $\text{ઉત્તર}=\frac{\frac{૨\text{સ}}{\text{ગ}}-૨\ \text{આ}}{\text{ગ}-૧}$

એમાં નવમા કોઠા પ્રમાણે આદિપદની કીમત લખી તો

$$\text{ઉત્તર}=\frac{\frac{૨\ \text{સ}}{\text{ગ}}-\left(\frac{૪\text{સ}}{\text{ગ}}-૨\ \text{અંત}\right)}{\text{ગ}-૧}$$

તેથી $\text{ઉત્તર}=\frac{\frac{૨\text{સ}}{\text{ગ}}-\frac{૪\text{સ}}{\text{ગ}}+૨\ \text{અંત}}{\text{ગ}-૧}$ તેથી $\text{ઉત્તર}=\frac{૨\text{અં}-\frac{૨\text{સ}}{\text{ગ}}}{\text{ગ}-૧}$ જ.

૧૭ આદિ, અંત અને સર્વધન ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોય તો— બીજા કોઠા પ્રમાણે, $\text{ઉત્તર}=\frac{\text{અ}.-\text{આ}.}{\text{ગ}-૧}$ છે તેમાં ગચ્છની કીમત ૧૮ મા કોઠા પ્રમાણે લખ્યાથી $\text{ઉત્તર}=\frac{\text{અ}.-\text{આ}}{\frac{૨\text{સ}}{\text{અ}.+\text{આ}}-૧}$ અથવા $\text{ઉત્તર}=\frac{\text{અ}.-\text{આ}}{\frac{૨\text{સ}-\text{અ}.-\text{આ}}{\text{અ}.+\text{આ}}}$ અંશ અને છેદ બંનેને અંત+આદિએ ગુણ્યાથી $\text{ઉત્તર}=\frac{\text{અ}^૨-\text{આ}^૨}{૨\text{સ}-\text{અ}.-\text{આ}}$ જવાબ.

૧૮ આદિ, અંત અને સર્વધન ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોયતો. પાંચમા કોઠા પ્રમાણે સર્વધન= $(\text{આદિ}+\text{અંત})\frac{\text{ગ}}{૨}$. બધાને બમણા કર્યાતો ૨ સર્વધન=(આદિ+અંત) ગચ્છ. બંને તરફ આદિ+અંતે ભાગ્યા તો ગચ્છ= $\frac{૨\text{સ}}{\text{આ}+\text{અં}}$. જવાબ.

૧૯ આદિ, ઉત્તર અને સર્વધન ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોયતો. ૩ જા કોઠા પ્રમાણે ગચ્છ = $\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ઉત્તર}}+૧$. તેમાં અંતની કીંમત આઠમા કોઠા પ્રમાણે મૂકીતો—

$$\text{ગચ્છ}=\frac{\sqrt{\text{ઉત્તર}\,(૨\text{સ}-\text{આ}+\frac{૧}{૪}\text{ઉ})+\text{આ}^૨}-\frac{૧}{૨}\text{ઉ}-\text{આ}}{\text{ઉત્તર}}+૧$$

અથવા અંશ અને છેદને બેએ ગુણ્યા તો—

$$\text{ગચ્છ}=\frac{\sqrt{૪\text{ઉ}(૨\text{સ}-\text{આ}+\frac{૧}{૪}\text{ઉ})+૪\text{આ}^૨}-\text{ઉ}-૨\text{આ}}{૨\text{ઉત્તર}}+૧ \text{ અથવા}$$

$$\text{ગચ્છ}=\frac{\sqrt{૮\text{સ}\times\text{ઉ}-૪\text{આ}\times\text{ઉ}+\text{ઉ}^૨+૪\text{આ}^૨}}{૨\text{ ઉત્તર}}-\frac{\text{ઉ}-૨\text{આ}+૨\text{ઉ}}{૨\text{ ઉત્તર}} \text{ અથવા}$$

$$\text{ગચ્છ}=\frac{\sqrt{૮\text{સ}\times\text{ઉ}+(૨\text{આ}-\text{ઉ})^૨}}{૨\text{ ઉત્તર}}-\frac{૨\text{આ}-\text{ઉ}}{૨\text{ ઉત્તર}} \text{ જવાબ.}$$

૨૦ અંત, સર્વધન અને ઉત્તર ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોયતે. ૩ જા કોઠા પ્રમાણે ગ= $\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ઉ}}+૧$ એમાં ૧૧મા કોઠા પ્રમાણે આદિપદની કીંમત લખી તો—

$$\text{ગચ્છ}=\frac{\text{અં}-(\sqrt{\text{અં}^૨+\text{ઉ}(\text{અં}-૨\text{સ}+\frac{\text{ઉ}}{૪})}+\frac{\text{ઉ}}{૨})}{\text{ઉ}}+૧ \text{ અથવા}$$

$$\text{ગ}=\frac{\text{અં}-\sqrt{\text{અં}^૨+\text{ઉ}(\text{અં}-૨\text{સ}+\frac{\text{ઉ}}{૪})}-\frac{\text{ઉ}}{૨}}{\text{ઉ}}+૧ \text{ અથવા}$$

$$\text{ગ}=\frac{\text{અં}-\sqrt{\text{અં}^૨+\text{ઉ}(\text{અં}-૨\text{સ}+\frac{\text{ઉ}}{૪})}}{\text{ઉ}}-\frac{૧}{૨}+૧$$

$$\text{માટે ગ}=\frac{\text{અં}}{\text{ઉ}}+\frac{૧}{૨}-\frac{\sqrt{\text{અં}^૨+\text{ઉ}(\text{અં}-૨\text{સ}+\frac{\text{ઉ}}{૪})}}{\text{ઉ}} \text{ જવાબ.}$$

યાદ રહેવા માટે ગણિત શ્રેઢીના ઉપલા ૨૦ કોઠા નીચે લખ્યા છે.

ચઢતી શ્રેઢી.

(૧) $\text{આ}=\text{અં}-(\text{ગ}-\text{૧})\times\text{ઉ}$. (૨) $\text{આ}=\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-\text{અં}$

(૩) $\text{આ}=\dfrac{\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-(\text{ગ}-\text{૧})\times\text{ઉ}}{\text{૨}}$

(૪) $\text{આ}=\sqrt{\text{અં}^{\text{૨}}+\text{ઉ}(\text{અં}-\text{૨સ}+\frac{\text{ઉ}}{\text{૪}})}+\frac{\text{ઉ}}{\text{૨}}$ (૫) $\text{અં}=\text{આ}+(\text{ગ}-\text{૧})\times\text{ઉ}$

(૬) $\text{અં}=\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-\text{આ}$ (૭) $\text{અં}=\dfrac{\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}+(\text{ગ}-\text{૧})\times\text{ઉ}}{\text{૨}}$

(૮) $\text{અં}=\sqrt{\text{ઉ}(\text{૨સ}-\text{આ}+\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ})+\text{આ}^{\text{૨}}}-\frac{\text{૧}}{\text{૨}}\text{ઉ}$.

(૯) $\text{ઉ}=\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ગ}-\text{૧}}$ (૧૦) $\text{ઉ}=\dfrac{\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-\text{૨આ}}{\text{ગ}-\text{૧}}$ (૧૧) $\text{ઉ}=\dfrac{\text{૨અં}-\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}}{\text{ગ}-\text{૧}}$

(૧૨) $\text{ઉ}=\dfrac{\text{અં}^{\text{૨}}-\text{આ}^{\text{૨}}}{\text{૨સ}-\text{અં}-\text{આ}}$ (૧૩) $\text{ગ}=\dfrac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ઉ}}+\text{૧}$

(૧૪) $\text{ગ}=\frac{\text{૨સ}}{\text{અં}+\text{આ}}$ (૧૫) $\text{ગ}=\dfrac{\sqrt{\text{૮સઉ}+(\text{૨આ}-\text{ઉ})^{\text{૨}}}}{\text{૨ઉ}}-\dfrac{\text{૨આ}-\text{ઉ}}{\text{૨ઉ}}$

(૧૬) $\text{ગ}=\frac{\text{અં}}{\text{ઉ}}+\frac{\text{૧}}{\text{૨}}-\dfrac{\sqrt{\text{અં}^{\text{૨}}+\text{ઉ}(\text{અં}-\text{૨સ}+\frac{\text{ઉ}}{\text{૪}})}}{\text{ઉ}}$

(૧૭) $\text{સ}=(\text{અં}+\text{આ})\frac{\text{ગ}}{\text{૨}}$ (૧૮) $\text{સ}=[\text{૨આ}+\text{ઉ}(\text{ગ}-\text{૧})]\frac{\text{ગ}}{\text{૨}}$

(૧૯) $\text{સ}=[\text{૨અં}-\text{ઉ}(\text{ગ}-\text{૧})]\frac{\text{ગ}}{\text{૨}}$ (૨૦) $\text{સ}=\dfrac{\text{અં}^{\text{૨}}-\text{આ}^{\text{૨}}}{\text{૨ઉ}}+\dfrac{\text{અં}+\text{આ}}{\text{૨}}$

ઉતરતી શ્રેઢી.

(૧) $\text{આ}=\text{અં}+(\text{ગ}-\text{૧})\text{ઉ}$ (૨) $\text{આ}=\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-\text{અં}$ (૩) $\text{આ}=\dfrac{\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}+(\text{ગ}-\text{૧})\text{ઉ}}{\text{૨}}$

(૪) $\text{આ}=\sqrt{\text{૨સઉ}-\text{અંઉ}+\text{અં}^{\text{૨}}+\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ}^{\text{૨}}}-\frac{\text{૧}}{\text{૨}}\text{ઉ}$

(૫) $\text{અં}=\text{આ}-(\text{ગ}-\text{૧})\text{ઉ}$ (૬) $\text{અં}=\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-\text{આ}$ (૭) $\text{અં}=\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-(\text{ગ}-\text{૧})\text{ઉ}$

(૮) $\text{અં}=\sqrt{\text{આ}^{\text{૨}}-\text{ઉ}(\text{૨સ}-\text{આ}-\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\text{ઉ})}+\frac{\text{૧}}{\text{૨}}\text{ઉ}$ (૯) $\text{ઉ}=\frac{\text{આ}-\text{અં}}{\text{ગ}-\text{૧}}$

(૧૦) $\text{ઉ}=\frac{\text{આ}-\text{અં}}{\text{૨સ}-\text{આ}-\text{અં}}$ (૧૧) $\text{ઉ}=\dfrac{\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}-\text{૨અં}}{\text{ગ}-\text{૧}}$ (૧૨) $\text{ઉ}=\dfrac{\text{૨આ}-\frac{\text{૨સ}}{\text{ગ}}}{\text{ગ}-\text{૧}}$

(૧૩) $\text{ગ}=\frac{\text{આ}-\text{અં}}{\text{ઉ}}+\text{૧}$ (૧૪) $\text{ગ}=\frac{\text{૨સ}}{\text{આ}+\text{અં}}$

(૧૫) $ગ=\sqrt{\frac{(સઉ+૨અં-ઉ)^{૨}}{૨ઉ}-\frac{૨અં-ઉ^{૨}}{૨ઉ}}$

(૧૬) $ગ=\frac{આ}{ઉ}+\frac{૧}{૨}-\frac{\sqrt{આ^{૨}+૩(આ-૨સ+\frac{ઉ}{૪})}}{ઉ}$

(૧૭) $સ=(આ+અં)\frac{ગ}{૨}$ (૧૮) $સ=(૨અં+(ગ-૧)ઉ)\frac{ગ}{૨}$

(૧૯) $સ=(૨આ-(ગ-૧)ઉ)\frac{ગ}{૨}$ (૨૦) $સ=\frac{આ^{૨}-અં^{૨}}{ઉ}+\frac{આ+અં}{૨}$

ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી.

જ્યારે કેટલીક સંખ્યાઓ એક કરતાં બીજી અમુક ગણી વધારે હેાય ત્યારે તે સંખ્યાઓની શ્રેઢીને ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી કહેછે. એવી શ્રેઢીમાં એક સંખ્યા કરતાં બીજી જેટલા ગણી વધારે હેાય તેને ગુણેાત્તર કહેછે. જ્યારે ગુણેાત્તર એક કરતાં વધારે હેાય ત્યારે તે શ્રેઢીને ચડતી ને ગુણેાત્તર એક કરતાં ઓછું હેાય ત્યારે ઉતરતી શ્રેઢી કહેવાય છે. ૧. ૨, ૪. ૮, ૧૬, ૩૨, ૬૪, ૧૨૮, ૨૫૬, ૫૧૨, એ ચઢતી શ્રેઢી છે. ને ૯૭૨. ૩૨૪ ૧૦૮. ૩૬, ૧૨, ૪ એ ઉતરતી શ્રેઢી છે. પહેલીમાં ગુણેાત્તર બે અને બીજીમાં ⅓ છે.

ગણિત પ્રમાણ શ્રેઢીની માફક ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢીમાં પણ શ્રેઢીના પહેલા પદને આદિ, છેલ્લા પદને અંત, પદ સંખ્યાને ગચ્છ, બધા સંખ્યાઓના સરવાળાને સર્વધન અને જેટલા ગણું પ્રમાણ હેાય તેને ગુણેાત્તર કહે છે.

૧. ઉપરની શ્રેઢી ઉપરથી માલમ પડશે કે કેાઈ પણ ત્રણ પદેા ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હેાય તેા તેના પહેલા ને ત્રીજાનેા ગુણાકાર વચલા પદના વર્ગની બરાબર થાય. કેમકે બીજા પદ કરતાં ત્રીજું પદ જેટલા ગણું વધારે હેાય તેટલા ગણું પહેલું પદ બીજા કરતાં નાનું હેાય છે. ૨. તેમજ ચાર પદેા ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હેાય તેા પહેલા ને છેલ્લાનેા ગુણાકાર, વચલા બેના ગુણાકાર બરાબર થશે. ૩. જે સંખ્યાઓ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હેાય તે સંખ્યાઓની બાદબાકી પણ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં થશે. ૪. જો ત્રણ સંખ્યા ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હેાય તેા તેમાંની પહેલીઃ ત્રીજીઃઃ પહેલીનેા વર્ગઃ બીજીના વર્ગને. ૫ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં પહેલા પદને ગુણેાત્તરે ગુ-

ણે તો બીજું પદ, ગુણોત્તરના વર્ગે ગુણે તો ત્રીજું, ગુણોત્તરના ઘને ગુણે તો ચોથું, ગુણોત્તરના ચાર ઘાતે ગુણે તો પાંચમું પદ આવેછે. એ રીતે જેટલામું પદ કહાડવું હોય તેના કરતાં એક ઓછો એટલા ગુણોત્તરના ઘાતે આદિ પદને ગુણવાથી આવશે. ૬. જો ત્રણ પદ પ્રમાણમાં હોય તો પહેલા ને ત્રીજાનો ગુણાકાર બીજાના વર્ગ બરાબર છે માટે પહેલાને ત્રીજાના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ બીજું પદ થશે. ૭. પણ જ્યારે બે પદની વચ્ચે એક કરતાં વધારે પદ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં મૂકવાં હોય ત્યારે તે પ્રમાણનું ગુણોત્તર બોળી કહાડવું જોઇએ. પાંચમા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણના પહેલા પદને ગુણોત્તરે ગુણ્યાથી બીજું, પહેલાને ગુણોત્તરના વર્ગે ગુણવાથી ત્રીજું એ પ્રમાણે પદો આવે છે, એટલે પાંચમા પદની = પહેલું × ગુણોત્તરનો ચાર ઘાત છે. માટે પાંચમા પદને પહેલા પદે ભાગે તો ગુણોત્તરનો ચાર ઘાત આવે, તેથી તેનું ચતુર્ઘાત મૂળ તે ગુણોત્તર થશે. ૮. ભૂમીતિ પ્રમાણમાં કોઈ પણ બે પદોનો ગુણાકાર તે બે પદોથી સરખા અંતરનાં બે પદોના ગુણાકારની બરાબર છે. આ નિયમ બીજા નિયમ ઉપરથી સમજાશે. ગણિત પ્રમાણની પેઠે ભૂમીતિ પ્રમાણમાં પણ પાંચ વાનાં આદિ, અંત, ગચ્છ, સર્વધન અને ગુણોત્તર હોય છે. તેમાંનાં કોઇ ત્રણ પદ આપ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનું પદ નીકળી શકશે. તે કહાડવાની સિદ્ધતા આ નીચે આપી છે તે ઉપરના આઠ નિયમો બરાબર સમજ્યાથી ઝટ ધ્યાનમાં ઉતરશે—

૧ આદિ, ગચ્છ અને ગુણોત્તર ઉપરથી અંતપદ કાઢવું હોયતો—

આદિપદ ને ગુણોત્તરના ગચ્છ ઓછા એક ઘાતે ગુણવા એટલે† $\text{અં} = \text{આ} \times \text{ગુ}^{\text{ગ}-\text{૧}}$ કારણ—ઉપરના પાંચમા નિ-

---

† કોઠા લખવામાં ગણિત પ્રમાણમાં પદના આખા નામને બદલે આદ્યાક્ષર લખવાનો જે નિયમ રાખ્યો હતો તેજ નિયમ આમાં પણ રાખ્યો છે. જેમકે ગુણોત્તરને બદલે ગુ. ઈ.

યમ પ્રમાણે અંતપદ કહાડવું છે તે દશમું પદ હોય તો ગુણોત્તરની ગચ્છ અથવા પદ સંખ્યા દશ છે માટે ૧૦–૧= ૯ ઘાતે આદિપદને ગુણવાથી દશમું પદ અથવા અંતપદ આવશે.

૨ આદિ ને અંત ઉપરથી વચલું પદ કહાડવું હોયતો–

આદિ ને અંતના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે મદ્યપદ= $\sqrt{\text{આ} \times \text{અં}}$

કારણ–છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પહેલા ને ત્રીજા પદનો ગુણાકાર બીજાના વર્ગની બરાબર છે. તો પેહેલા ને ત્રીજાના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ બીજાપદની બરાબર થવું જોઇએ. ઉપરના પ્રમાણુમાં આદિપદ પહેલું, અંતપદ ત્રીજું ને મધ્યપદ એ બીજું પદ છે એ સ્પષ્ટ છે. આ નિયમ ઉપરથી કોઈ પણ બે પદોને આદિ, અંત ધારીને વચમાં જોઇએ તેટલાં પદ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં મૂકાશે. જેમકે ૨ ને ૫૧૨ એની વચમાનું પદ $\sqrt{૨ \times ૫૧૨}$ = ૩૨ તેમજ ૨ને ૩૨ ની વચમાં ૮, અને ૩૨ અને ૫૧૨ની વચમાં ૧૨૮ આવશે. તેથી ૨, ૮, ૩૨, ૧૨૮, ૫૧૨ આ ભૂમીતિ પ્રમાણ થયું. હજુ વધારે મૂકવાં હશે તો મૂકાશે. ૨ ને ૮ ની વચમાં ૪, ૮ અને ૩૨ ની વચમાં ૧૬, ૩૨ ને ૧૨૮ ની વચમાં ૬૪ અને ૧૨૮ ને ૫૧૨ ની વચમાં ૨૫૬ આવશે. તેથી ૨, ૪, ૮, ૧૬, ૩૨, ૬૪, ૧૨૮, ૨૫૬, ૫૧૨ એ ભૂમીતિ પ્રમાણ થયું.

૩ આદિ, અંત ને ગચ્છ ઉપરથી ગુણોત્તર કહાડવું હોય તો– અંત ને આદિએ ભાગી તેનું ગચ્છ–૧ ઘાતમૂળ કાહાડવું. એટલે

$$\text{ગુ} = \sqrt[\text{ગ}-૧]{\frac{\text{અં}}{\text{આ}}}$$

કારણ–ઉપરના ૧ લા કોઠા પ્રમાણે અંતપદ બરાબર આદિપદને ગુણોત્તરના ગચ્છ–૧ ઘાત ગણા કરીએ છીએ માટે અંતને આદિએ ભાગ્યાથી ગુણોત્તરનો ગચ્છ–૧ ઘાત આવશે, તેથી તે ભાગાકારનું ગચ્છ–૧ ઘાતમૂળ કહાડયાથી ગુણોત્તર આવવું જોઇએ.

સિદ્ધતા. $અં = આ \times ગુ^{ગ-૧}$

બંને તરફ આદિએ ભાગ્યાથી $\frac{અં}{આ} = ગુ^{ગ-૧}$

બંને તરફનું ગ-૧ ઘાતમૂળ કહાડયાથી $\sqrt[ગ-૧]{\frac{અં}{આ}} = ગુ$. એજ.

૪. આદિ ગુણોત્તરને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોય તો–

$$સ = \frac{આ\ (ગુ^{ગ} - ૧)}{ગુ - ૧}$$

સિદ્ધતા—ધારો કે ૨, ૬, ૧૮, ૫૪, ૧૬૨, ૪૮૬ એ એ ૭ પદનો સરવાળો કરવો છે તો સર્વધન=૨+૬+૧૮+૫૪+૧૬૨+૪૮૬ થયા. માટે બંને તરફનાને ત્રણ ગણાકર્યા તો ૩સ = ૬+૧૮+૫૪+૧૬૨+૪૮૬+૧૪૫૮ થયા તેમાંથી

સ=૨+૬+૧૮+૫૪+૧૬૨+૪૮૬ બાદ કર્યું તો—

૨સ=૧૪૫૮–૨ રહ્યા માટેસ=$\frac{૧૪૫૮-૨}{૨}$ પણ ૧૪૫૮ એ ગુણોત્તરના ગચ્છ ઘાતને આદિએ ગુણીએ તેની બરાબર છે, ને-૨ એ આદિ પદની બરાબર છે તથા છેદના બે એ ગુણોત્તર -૧ની બરાબરછે માટે સ=$\frac{૧૪૫૮-૨}{૨}$ અથવાસ=$\frac{આ \times ગુ^{ગ} - આ}{ગુ-૧}$

જમણી તરફના અંશમાંથી આ ગુણક કહાડયો તો–

$સ = \frac{આ\ (ગુ^{ગ} - ૧)}{ગુ - ૧}$ એ જવાબ.

૫ અંત, ગુણોત્તર ને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કહાડવું હોય તો ૧ લા કોઠા પ્રમાણે $અં = આ \times ગુ^{ગ-૧}$ બંને તરફ $ગુ^{ગ-૧}$ ભાગ્યા તો $\frac{અં}{ગુ^{ગ-૧}} = આ$ એ જવાબ.

૬ આદિ. અંત ને ગુણોત્તર ઊપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો ઊપર ૪થા કોઠાની સિદ્ધતા કરી તે પ્રમાણે.

સ=૧+૩+૯+૨૭+૮૧+૨૪૩ છે તેને ત્રમણા કર્યા તો.
૩ સ=૩+૯+૨૮+૮૧+૨૪૩+૨૭૮ આવ્યા.
તેમાંથી ૧ લું પદ સ=૧+૩+૯+૨૭+૮૧+૨૪૩ બાદ કર્યા તો.

૨સ=૭૨૯−૧ પણ ૭૨૯તે ૨૪૩×૩ છે એટલે અંત×ગુણોત્તર છે. બંને તરફ બેએ ભાગ્યા તો $\text{સ}=\frac{૭૨૯-૧}{૨}$

અથવા $\frac{\text{અં}\times\text{ગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$ આવ્યા તેથી. $\text{સ}=\frac{\text{અં ગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$

૭ અંત, ગચ્છ, અને ગુણોત્તર ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો ૬ઠા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ}=\frac{\text{અં ગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$ છે તેમાંથી આ ની કીંમત ૫મા કોઠા પ્રમાણે લખીતો $\text{સ}=\frac{\text{અં ગુ}-\frac{\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}}}{\text{ગુ}-૧}$ અથવા

$\text{સ}=\frac{\frac{\text{અં ગુ}^{\text{ગ}-૧}\times\text{ગુ}=\text{અં ગુ}^{\text{ગ}}-\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}}}{\text{ગુ}-૧}$ અંશ અને છેદ બંનેને ગુ-૧

ગુણ્યાતો $\text{સ}=\frac{\text{અં ગુ}^{\text{ગ}+૧}-\text{અં ગુ}-\text{અં ગુ}^{\text{ગ}}+\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧}$ અંશમાં અં ગુણક

કહાડયો તો $\text{સ}=\frac{\text{અં}(\text{ગુ}^{\text{ગ}+૧}-\text{ગુ}-\text{ગુ}^{\text{ગ}}+૧)}{\text{ગુ}^{-૧}}$

૮ આદિ, અંતને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવુ હોય તો—

૬ ઠા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ}=\frac{\text{અં ગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$ એમાં ૩ જા કોઠા પ્રમાણે

ગુણોત્તરનીકીંમત લખીતોસ$=\frac{\text{અં}\times\sqrt[\text{ગ}-૧]{\frac{\text{અં}}{\text{આ}}}-\text{આ}}{\sqrt[\text{ગ}-૧]{\frac{\text{અં}}{\text{આ}}}-૧}$

૯ સર્વધન, આદીને અંત ઉપરથી ગુણોત્તર કહાડવું હોયતો—
૬ઠ્ઠા કોઠા પ્રમાણે $સ=\frac{અંગુ-આ}{ગુ-૧}$ ને ૪થા કોઠા પ્રમાણે—
$સ=\frac{આ(ગુ^{ગ}-૧)}{ગુ-૧}$ તેથી એ બંને કીંમત બરાબર છે માટે
$\frac{અંગુ-આ}{ગુ-૧}=\frac{આ(ગુ^{ગ}-૧)}{ગુ-૧}$ બંને તરફ ગુ-૧ ગણા કર્યા તો—
$અંગુ-આ=આ(ગુ^{ગ}-૧)$ પણ ૪ થા કોઠા પ્રમાણે $સ=\frac{આ(ગુ^{ગ}-૧)}{ગુ-૧}$
છે તો છેદ ઉરાડયાથી $સગુ-સ=આ\ (ગુ^{ગ}-૧)$ આવ્યા અને
ઉપર $આ\ (ગુ^{ગ}-૧)=અંગુ-આ$ છે તેથી $સગુ-સ=અંગુ-આ$
થવા જોઇએ. સ્થળાંતર કર્યાથી $સગુ-અંગુ=સ-આ$ અથવા $ગુ$
$[સ-અં]=સ-આ$ છે તો બંને તરફ સ-અં ભાગ્યાથી $ગુ=\frac{સ-આ}{સ-અં}$

૧૦ સર્વધન, અંત, ને ગુણોત્તર ઉપરથી આદિ કહાડવાનું
નવમા કોઠા પ્રમાણે $ગુ=\frac{સ-આ}{સ-અં}$ છેદ ઉરાડયાથી $સગુ-અંગુ$
$=સ-આ$. સ્થળાંતર કર્યાથી $આ=અંગુ-સગુ+સ$
અથવા $આ=અંગુ-સ[ગુ-૧]$ જવાબ.

૧૧ સર્વધન, ગચ્છ અને ગુણોત્તર ઉપરથી આદી કહાડવાનું
૪થા કોઠા પ્રમાણે $સ=\frac{આ(ગુ^{ગ}-૧)}{ગુ-૧}$ છેદ ઊરાડયા તો $સગુ-સ=$
$આ\ (ગુ^{ગ}-૧)$ બંને તરફ $ગુ^{ગ}-૧$ ભાગ્યા તો $\frac{સગુ-સ}{ગુ^{ગ}-૧}=આ$.

૧૨ સર્વધન, ગુણોત્તર ને ગચ્છ ઉપરથી અંત કહાડવાનું.
૧ લા કોઠા પ્રમાણે $અં=આગુ^{ગ-૧}$ છે એમાં ૧૧મા કોઠા પ્ર-
માણે આ ની કીંમત લખી તો $અં=(\frac{સગુ-સ}{ગુ^{ગ}-૧})ગુ^{ગ-૧}$
અથવા $અં=(\frac{સ(ગુ-૧)}{ગુ^{ગ}-૧})ગુ^{ગ-૧}$ ગુણકે ગુણ્યાથી $અં=\frac{સ(ગુ^{ગ}-ગુ^{ગ-૧})}{ગુ^{ગ}-૧}$ જ.

૧૩ આદિ, સર્વધનને ગુણોત્તર ઉપરથી અંત કહાડવાનું
દશમા કોઠા પ્રમાણે આ=અંગુ−સ (ગુ−૧) સ્થળાંતરથી
આ+સ(ગુ−૧)=અંગુ બંને તરફ ગુ એ ભાગ્યાથી—

$\frac{આ+સ(ગુ-૧)}{ગુ}$=અં જવાબ.

ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢીના કોઠા.

ચઢતી શ્રેઢી.	ઉતરતી શ્રેઢી
(૧) $આ=\frac{અં}{ગુ^{ગ-૧}}$	(૧) $આ=\frac{અં}{ગુ^{ગ-૧}}$
(૨) આ=અંગુ−સ (ગુ−૧)	(૨) આ=અંગુ+સ−સગુ
(૩) $આ=\frac{સગુ-સ}{ગુ^{ગ}-૧}$	(૩) $આ=\frac{સ-સગુ}{૧-ગુ^{ગ}}$
(૪) અં=સ(ગુ^ગ−૧)	(૪) $અં=આગુ^{ગ-૧}$
(૫) $અં=સ(ગુ^{ગ}-ગુ^{ગ-૧})$	(૫) $અં=\frac{સ(ગુ^{ગ-૧}-ગુ^{ગ})}{૧-ગુ^{ગ}}$
(૬) $અં=\frac{આ+સ(ગુ-૧)}{ગુ}$	(૬) $અં=\frac{આ-(સ-સગુ)}{ગુ}$
(૭) $ગુ=\sqrt[ગ-૧]{\frac{અં}{આ}}$	(૭) $ગુ=\sqrt[ગ-૧]{\frac{અં}{આ}}$
(૮) $ગુ=\frac{સ-આ}{સ-અં}$	(૮) $ગુ=\frac{સ-આ}{સ-અં}$
(૯) $સ=\frac{આ(ગુ^{ગ}-૧)}{ગુ-૧}$	(૯) $સ=\frac{આ(૧-ગુ^{ગ})}{૧-ગુ}$
(૧૦) $સ=\frac{અંગુ-આ}{ગુ-૧}$	(૧૦) $સ=\frac{આ-અંગુ}{૧-ગુ}$
(૧૧) $સ=અં\frac{(ગુ^{ગ+૧}-અંગુ^{ગ}ગુ+૧)}{ગુ^{ગ-૧}}$	અનંત શ્રેઢી હોય તો $સ=\frac{આ}{૧-ગુ}$

(૧૨) $સ=\frac{અં\times ગ-૧\sqrt{\frac{અં}{આ}}-આ}{\sqrt[ગ-૧]{\frac{અં}{આ}}-૧}$

સંખ્યાનો પાયો.

સંખ્યા લખવામાં જમણા હાથ ભણીના છેલ્લા અથવા એકમના સ્થાન કરતાં ડાબા હાથ ભણીનું દરેક સ્થાન જેટલા ઘણું વધતું જાય તેને સંખ્યાનો પાયો કહેછે. આપણી સંખ્યાનો પાયો દશ છે. અને એજ રીતે સુધરેલા બધા દેશોમાં હાલ ચાલેછે. સંખ્યાના પાયાના અર્થ ઉપરથી સમજાશે કે જે સંખ્યાનો જેટલો પાયો હોય તેના કરતાં એક ઓછા એટલા તે પાયાના એકમ હોય, ને તે સંખ્યાના દશકનું સ્થાન એકમ કરતાં તે સંખ્યા ગણું હોય શતકનું સ્થાન તે પાયાની સંખ્યાના વર્ગ ગણું. જેમ કે સાતના પાયામાં એકમ ૬ સુધી હોય. ને સાત એ એક દશકનીને આઠ એ એક દશકને એક એકમની બરાબર છે. ૪૯ એ સાતના પાયાના સાત દશક અથવા સોની બરાબર થાય. તેમજ પંદરના પાયામાં ચૌદ સુધી એકમ ને પંદર એ એક દશકની બરાબર થાય. ૩૦ બે દશકની ને ૨૨૫ એ પંદર દશક અથવા એક શતકની બરાબર છે. આપણી સંખ્યા દશના પાયાની હોવાથી ચૌદ લખવા હોય તો એક દશકને ચાર એકમ એટલે ચૌદ લખાય. પણ પંદરના પાયામા ચૌદ એકમ સ્થાનને લખવાને એક અંક જોઇએ, તે ખુટ આપણા ગણિતના ગ્રંથોમાં અંકને બદલે અક્ષર લેઇને પુરી પાડી છે. જેમકે પંદરના પાયામાના દશ લખવા હોય તો અ અગીઆર લખવા હોયતો બ બાર લખવા હોય તો ક તેર લખવા હોય તો ડ અને ચૌદ લખવા હોય તો ઇ ઈત્યાદિ અક્ષરો છે.

એક પાયાનીસંખ્યાને બીજા પાયામાં લાવવાની રીતનીચેમુજબ.

જે પાયાની સંખ્યામાં લાવવા હોય તેને તેટલાએ ભાગવા. જે વધે તે એકમ આવશે અને જે ભાગાકાર આવ્યો હશે તે દશક આવશે. તેને ફરીને તે પાયાની સંખ્યાએ ભાગ્યાથી શતક આવશે, અને વધશે તે દશક વધશે. એ પ્રમાણે છેવટ સુધી કરવું.

આ રીતનું કારણ સમજાવવાને એક દાખલો લઇએ.

દા. ૧. ૪૨૫ દશના પાયાની સંખ્યાને સાતમા પાયામાં લાવો.

૭	૪૨૫
૭	૬૦–૫
૭	૮–૪
	૧–૧

આમાં ૪૨૫ને સાતે ભાગ્યા તો દશના પાયાના ૬૦ સાતના પાયાના દશક આવ્યા એ દશક ને સાતે ભાગ્યાથી દશના પાયાના ૮ સાતના પાયાના સો આવ્યા તેને સાતે ભાગ્યાથી ૧ હજાર આવ્યો એટલે ૪૨૫ દશના પાયાના ૧૧૪૫ સાતના પાયાનાની બરાબર થયા. ફરી એજ રકમને દશના પાયામાં લાવ્યાથી ઉપલું કારણ જલદી સમજાશે.

દા. ૨જો

	૧૧૪૫
૧૦	૧૦–૫
૧૦	૪–૨

સાતના પાયાનાછે તેને દશના પાયામાં લાવો. આમાં સાતના પાયાના એક હજારને દશે ભગાતા નથી માટે તેના ૭ શતક+૧ શતક =આઠ શતક થયા, પણ આઠ શતકને દશે નહીં ભગાવાથીતેના દશક કરી ચાર દશક ઉમેર્યાતો ૬૦ દશકને દશે ભાગ્યા તો ૪૨ દશક થયા. માટે ૪ સોને બે દશક થયા, એટલે ૧૧૪૫ સાતના પાયાના ૪૨૫ દશના પાયાનાની બરાબર છે.

આ રીતે કોઈપણ પાયામાં તે પાયાની સંખ્યાઓનો સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર વગેરે થઇ શકેછે. માત્ર તે ગણવામા ગણનારે તે સંખ્યા દશક. શતક ઇત્યાદિની કીમત યાદ રાખવી જોઇએ. જેમકે ૧૧૨૫ અને ૩૪ સાતના પાયાની સંખ્યાઓ છે તેનો સરવાળો, બાદબાકી ગુણાકાર અને ભાગાકાર કરવો હોયતો.

સરવાળો.	બાદબાકી.	ગુણાકાર.	ભાગાકાર.
૧૧૨૫	૧૧૨૫	૧૧૨૫	૩૪)૧૧૨૫(૨૨
૩૪	૩૪	૩૪	૧૦૧
૧૧૬૨	૧૦૬૧	૪૫૩૬	૧૧૫
		૩૪૧૧	૧૦૧
		૪૧૬૪૬	૧૪

આ દરેક હિસાબ ગણવામાં વાંચનાર જોશે કે સાતની વદી ગણવામાં આવે છે.

અપૂર્ણાંકમાં પણ એજ સંભાળ રાખ્યાથી થઇ શકશે. કોઈ પણ અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો, બાદબાકી ઇત્યાદિ કરવામાં તેના અંશ ને છેદને દશના પાયામાં લાવીને કરવાથી વધારે સુગમ પડશે. પરંતુ તેમ કર્યા સિવાય પણ ઉપરની રીતે થઇ શકશે ખરા. પુનરાવર્ત દશાંશને વ્યવહારીમાં મુક્યા પછી તેનો સરવાળોબાદબાકી ઇત્યાદિ જે કરવું હોય,તેથઈશકશે.

દા. $\frac{૭}{૧૨}+\frac{૪}{૫}$ એ આઠના પાયાની સંખ્યાનો સરવાળો કરવો હોય તો તેનો સમછેદ કરવાથી થશે અને બીજી રીતે પણ થશે. બીજી રીતે

$\frac{૭}{૧૨}+\frac{૧૦}{૧૨}=\frac{૧૭}{૧૨}$જ. $\frac{૭}{૧૨}+\frac{૪}{૫}=\frac{૪૩+૫૦}{૬૨}=\frac{૧૧૩}{૬૨}$અંશ છેદને પાંચેછેદ ઉરાડયો તો $\frac{૧૧૩}{૬૨}=\frac{૧૭}{૧૨}$ જવાબ.

દા. .૮. ને સાતના પાયામાં લાવવા હોયતો પ્રથમતેને વ્યવહારીનું ૩૫ આપ્યું તો $\frac{૮}{૯}$ આવ્યા તેને સાતના પાયામાં લાવવાને તો આઠ ને સાતના પાયામાં લાવ્યા તો ૧૧અને નવને સાતના પાયામાં લાવે તો ૧૨ આવે એટલે .૮દશના પાયાના $=\frac{૧૧}{૧૨}$ સાતના પાયાના એ જવાબ.

એજ પ્રમાણે જુદા જુદા પાયાની સંખ્યાઓનો સરવાળો, બાદબાકી અમુક પાયાની સંખ્યામાં પણ લવાશે. તેમજ સાતના પાયાની સંખ્યાનો ને પંદરના પાયાની સંખ્યાનો સરવાળો, બાદબાકી ઇત્યાદિ બારના પાયામાં લાવી શકાશે. કેમકે પ્રથમ બંને જુદા જુદા પાયાની સંખ્યાને બારના પાયામાં લાવી તેનો સરવાળો, બાદબાકી ઇત્યાદિ જે કરવું હશે તે થશે.

